

SM9 标识密码算法

第1 部分：总则

目 次

1 术语.....	3
2 符号和缩略语.....	3
3 有限域和椭圆曲线.....	4
3.1 有限域.....	4
3.1.1 概述.....	4
3.1.2 素域 F_p	5
3.1.3 有限域 F_{q^m}	5
3.2 有限域上的椭圆曲线.....	5
3.3 椭圆曲线群.....	6
3.4 椭圆曲线多倍点运算.....	6
3.5 椭圆曲线子群上点的验证.....	6
3.6 离散对数问题.....	7
3.6.1 有限域上离散对数问题 (DLP).....	7
3.6.2 椭圆曲线离散对数问题 ($ECDLP$).....	7
4 双线性对及安全曲线.....	7
4.1 双线性对.....	7
4.2 安全性.....	7
4.3 嵌入次数及安全曲线.....	8
5 数据类型及其转换.....	8
5.1 数据类型.....	8
5.2 数据类型转换.....	8
5.2.1 数据类型转换关系.....	8
5.2.2 整数到字节串的转换.....	9
5.2.3 字节串到整数的转换.....	9
5.2.4 比特串到字节串的转换.....	9
5.2.5 字节串到比特串的转换.....	9
5.2.6 域元素到字节串的转换.....	9
5.2.7 字节串到域元素的转换.....	10
5.2.8 点到字节串的转换.....	10
5.2.9 字节串到点的转换.....	11
6 系统参数及其验证.....	12
6.1 系统参数.....	12
6.2 系统参数的验证.....	12
附 录 A 关于椭圆曲线的背景知识.....	14
附 录 B 椭圆曲线上双线性对的计算.....	21
附 录 C 数论算法.....	28

SM9 标识密码算法

第 1 部分：总则

本部分描述了必要的数学基础知识与相关密码技术，以帮助实现本文其它各部分所规定的密码机制。

1 术语

1.1

标识 identity

可唯一确定一个实体身份的信息。标识应由实体无法否认的信息组成，如实体的可识别名称、电子邮箱、身份证号、电话号码等。

1.2

主密钥 master key

处于标识密码密钥分层结构最顶层的密钥，包括主私钥和主公钥，其中主公钥公开，主私钥由KGC秘密保存。KGC用主私钥和用户的标识生成用户的私钥。在标识密码中，主私钥一般由KGC通过随机数发生器产生，主公钥由主私钥结合系统参数产生。

本文中，签名系统的主密钥与加密系统的主密钥不同。数字签名算法属于签名系统，其主密钥为签名主密钥，密钥交换协议、密钥封装机制和公钥加密算法属于加密系统，其主密钥为加密主密钥。

1.3

密钥生成中心 key generation center; KGC

在SM9标识密码中，负责选择系统参数、生成主密钥并产生用户私钥的可信机构。

2 符号和缩略语

下列符号和缩略语适用于本部分。

cf : 椭圆曲线阶相对于 N 的余因子。

cid : 用一个字节表示的曲线识别符，用以区分所用曲线的类型。

DLP : 有限域上离散对数问题。

$deg(f)$: 多项式 $f(x)$ 的次数。

d_1 、 d_2 : k 的两个因子。

E : 定义在有限域上的椭圆曲线。

$ECDLP$: 椭圆曲线离散对数问题。

$E(F_q)$: 有限域 F_q 上椭圆曲线 E 的所有有理点(包括无穷远点 O)组成的集合。

$E(F_q)[r]$: $E(F_q)$ 上 r -扭点的集合(即曲线 $E(F_q)$ 上的 r 阶扭子群)。

e : 从 $G_1 \times G_2$ 到 G_T 的双线性对。

eid : 用一个字节表示的双线性对 e 的识别符, 用以区分所用双线性对的类型。

F_p : 包含 p 个元素的素域。

F_q : 包含 q 个元素的有限域。

F_q^* : 由 F_q 中所有非零元构成的乘法群。

F_{q^m} : 有限域 F_q 的 m 次扩域。

G_T : 阶为素数 N 的乘法循环群。

G_1 : 阶为素数 N 的加法循环群。

G_2 : 阶为素数 N 的加法循环群。

$\gcd(x, y)$: x 和 y 的最大公因子。

k : 曲线 $E(F_q)$ 相对于 N 的嵌入次数, 其中 N 是 $\#E(F_q)$ 的素因子。

m : 有限域 F_{q^m} 关于 F_q 的扩张次数。

$\text{mod } f(x)$: 模多项式 $f(x)$ 的运算。

$\text{mod } n$: 模 n 运算。例如, $23 \bmod 7 = 2$ 。

N : 循环群 G_1 、 G_2 和 G_T 的阶, 为大于 2^{191} 的素数。

O : 椭圆曲线上的一个特殊点, 称为无穷远点或零点, 是椭圆曲线加法群的单位元。

P : $P = (x_P, y_P)$ 是椭圆曲线上除 O 之外的一个点, 其坐标 x_P, y_P 满足椭圆曲线方程。

P_1 : G_1 的生成元。

P_2 : G_2 的生成元。

$P+Q$: 椭圆曲线 E 上两个点 P 与 Q 的和。

p : 大于 2^{191} 的素数。

q : 有限域 F_q 中元素的数目。

x_P : 点 P 的 x 坐标。

$x||y$: x 与 y 的拼接, 其中 x 和 y 是比特串或字节串。

$x \equiv y \pmod{q}$: x 与 y 模 q 同余。亦即, $x \bmod q = y \bmod q$ 。

y_P : 点 P 的 y 坐标。

$\#E(K)$: $E(K)$ 上点的数目, 称为椭圆曲线群 $E(K)$ 的阶, 其中 K 为有限域 (包括 F_q 和 F_{q^k})。

$\langle P \rangle$: 由椭圆曲线上点 P 生成的循环群。

$[u]P$: 椭圆曲线上点 P 的 u 倍点。

$[x, y]$: 不小于 x 且不大于 y 的整数的集合。

$\lceil x \rceil$: 顶函数, 不小于 x 的最小整数。例如, $\lceil 7 \rceil = 7, \lceil 8.3 \rceil = 9$ 。

$\lfloor x \rfloor$: 底函数, 不大于 x 的最大整数。例如, $\lfloor 7 \rfloor = 7, \lfloor 8.3 \rfloor = 8$ 。

β : 扭曲线参数。

ψ : G_2 到 G_1 的同态映射, 满足 $P_1 = \psi(P_2)$ 。

\oplus : 长度相等的两个比特串按比特的模2加运算。

3 有限域和椭圆曲线

3.1 有限域

3.1.1 概述

域由一个非空集合 F 和两种运算共同组成, 这两种运算分别为加法 (用 “+” 表示) 和乘法 (用 “ \cdot ” 表示), 并且满足下列算术特性:

- a) $(F, +)$ 对于加法运算构成加法交换群, 单位元用 0 表示。
- b) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ 对于乘法运算构成乘法交换群, 单位元用 1 表示。

c) 分配律成立：对于所有的 $a, b, c \in \mathbf{F}$ ，都有 $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 。

若集合 \mathbf{F} 是有限集合，则称域为有限域。有限域的元素个数称为有限域的阶。

3.1.2 素域 F_p

阶为素数的有限域是素域。

设 p 是一个素数，则整数模 p 的全体余数的集合 $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ 关于模 p 的加法和乘法构成一个 p 阶素域，用符号 F_p 表示。

F_p 具有如下性质：

- a) 加法单位元是0；
- b) 乘法单位元是1；
- c) 域元素的加法是整数的模 p 加法，即若 $a, b \in F_p$ ，则 $a + b = (a+b) \bmod p$ ；
- d) 域元素的乘法是整数的模 p 乘法，即若 $a, b \in F_p$ ，则 $a \cdot b = (a \cdot b) \bmod p$ 。

3.1.3 有限域 F_{q^m}

设 q 是一个素数或素数方幂， $f(x)$ 是多项式环 $F_q[x]$ 上的一个 m ($m > 1$)次不可约多项式(称为约化多项式或域多项式)，商环 $F_q[x]/(f(x))$ 是含 q^m 个元素的有限域(记为 F_{q^m})，称 F_{q^m} 是有限域 F_q 的扩域，域 F_q 为域 F_{q^m} 的子域， m 为扩张次数。 F_{q^m} 可以看成 F_q 上的 m 维向量空间。 F_{q^m} 的每一个元可以唯一地写成 $a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + \dots + a_{m-1}\beta_{m-1}$ 的形式，其中 $a_i \in F_q$ ，而 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ 是向量空间 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基。

F_{q^m} 中的元素可以用多项式基或正规基表示。在本文中，如果不作特别说明， F_{q^m} 中元素均采用多项式基表示。

不可约多项式 $f(x)$ 可取为首一的多项式 $f(x) = x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \dots + f_2x^2 + f_1x + f_0$ (其中 $f_i \in F_q, i = 0, 1, \dots, m-1$)， F_{q^m} 中的元素由多项式环 $F_q[x]$ 中所有次数低于 m 的多项式构成。多项式集合 $\{x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x, 1\}$ 是 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基，称为多项式基。域 F_{q^m} 上的任意一个元素 $a(x) = a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0$ 在 F_q 上的系数恰好构成了一个 m 维向量，用 $a = (a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ 表示，其中分量 $a_i \in F_q, i = 0, 1, \dots, m-1$ 。

F_{q^m} 具有如下性质：

- a) 零元0用 m 维向量 $(0, \dots, 0, 0)$ 表示；
- b) 乘法单位元1用 m 维向量 $(0, \dots, 0, 1)$ 表示；
- c) 两个域元素的加法为向量加法，各个分量用域 F_q 的加法；
- d) 域元素 a 和 b 的乘法定义如下：设 a 和 b 对应的 F_q 上多项式为 $a(x)$ 和 $b(x)$ ，则 $a \cdot b$ 定义为多项式 $(a(x) \cdot b(x)) \bmod f(x)$ 对应的向量。
- e) 逆元：设 a 对应的 F_q 上多项式为 $a(x)$ ， a 的逆元 a^{-1} 对应的 F_q 上多项式为 $a^{-1}(x)$ ，那么有 $a(x) \cdot a^{-1}(x) \equiv 1 \bmod f(x)$ 。

关于有限域的扩域 F_{q^m} 更多细节，参见附录A.1。

3.2 有限域上的椭圆曲线

有限域 $F_{q^m} (m \geq 1)$ 上的椭圆曲线是由点组成的集合。在仿射坐标系下，椭圆曲线上点 P (非无穷远点) 用满足一定方程的两个域元素 x_P 和 y_P 表示， x_P, y_P 分别称为点 P 的 x 坐标和 y 坐标，并记 $P = (x_P, y_P)$ 。

本部分描述特征为大素数 p 的域上的曲线。

本部分如果不作特别说明，椭圆曲线上的点均采用仿射坐标表示。

定义在 F_{p^m} 上的椭圆曲线方程为：

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in F_{p^m}, \quad \text{且 } 4a^3 + 27b^2 \neq 0. \quad (1)$$

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ 定义为：

$$E(F_{p^m}) = \{(x, y) | x, y \in F_{p^m}, \text{ 且满足方程(1)}\} \cup \{O\}, \quad \text{其中 } O \text{ 是无穷远点。}$$

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ 上的点的数目用 $\#E(F_{p^m})$ 表示，称为椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ 的阶。

本文规定素数 $p > 2^{191}$ 。

设 E 和 E' 是定义在 F_q 上的椭圆曲线，如果存在一个同构映射 $\phi_d: E'(F_{q^d}) \rightarrow E(F_{q^d})$ ，其中 d 是使映射存在的最小整数，则称 E' 为 E 的 d 次扭曲曲线。当 $p \geq 5$ 时， d 的取值有三种情况：

- a) 若 $a=0, b \neq 0$ ，那么 $d=6$ ， $E': y^2 = x^3 + \beta b$ ， $\phi_6: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/3}x, \beta^{-1/2}y)$ ；
- b) 若 $b=0, a \neq 0$ ，那么 $d=4$ ， $E': y^2 = x^3 + \beta ax$ ， $\phi_4: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/2}x, \beta^{-3/4}y)$ ；
- c) 若 $a \neq 0, b \neq 0$ ，那么 $d=2$ ， $E': y^2 = x^3 + \beta^2 ax + \beta^3 b$ ， $\phi_2: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1}x, \beta^{-3/2}y)$ 。

3.3 椭圆曲线群

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ ($m \geq 1$) 上的点按照下面的加法运算规则，构成一个交换群：

- a) $O + O = O$ ；
- b) $\forall P = (x, y) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}$ ， $P + O = O + P = P$ ；
- c) $\forall P = (x, y) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}$ ， P 的逆元素 $-P = (x, -y)$ ， $P + (-P) = O$ ；
- d) 两个非互逆的不同点相加的规则：
 设 $P_1 = (x_1, y_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}$ ， $P_2 = (x_2, y_2) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}$ ，且 $x_1 \neq x_2$ ，
 设 $P_3 = (x_3, y_3) = P_1 + P_2$ ，则

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1, \end{cases}$$

其中

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ;$$

- e) 倍点规则：
 设 $P_1 = (x_1, y_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}$ ，且 $y_1 \neq 0$ ， $P_3 = (x_3, y_3) = P_1 + P_1$ ，
 则

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - 2x_1, \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1, \end{cases}$$

其中

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} .$$

3.4 椭圆曲线多倍点运算

椭圆曲线上同一个点的重复相加称为该点的多倍点运算。设 u 是一个正整数， P 是椭圆曲线上的点，其 u 倍点 $Q = [u]P = \underbrace{P + P + \cdots + P}_{u \uparrow}$ 。

多倍点运算可以扩展到 0 倍点运算和负数倍点运算： $[0]P = O$ ， $[-u]P = [u](-P)$ 。

多倍点运算可以通过一些技巧有效地实现，参见附录 A.2。

3.5 椭圆曲线子群上点的验证

输入：定义 F_{q^m} 上 (q 为奇素数, $m \geq 1$) 椭圆曲线方程的参数 a 、 b ，椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ 上子群 G 的阶 N ， F_{q^m} 上的一对元素 (x, y) 。

输出：若 (x, y) 是群 G 中的元素，则输出“有效”；否则输出“无效”。

a) 在 F_{q^m} 上验证 (x, y) 是否满足椭圆曲线方程 $y^2 = x^3 + ax + b$;

b) 令 $Q = (x, y)$ ，验证 $[N]Q = O$;

若以上任何一项验证失败，则输出“无效”；否则，输出“有效”。

3.6 离散对数问题

3.6.1 有限域上离散对数问题(DLP)

有限域 F_{q^m} (q 为奇素数, $m \geq 1$) 的全体非零元素构成一个乘法循环群，记为 $F_{q^m}^*$ 。 $F_{q^m}^*$ 中存在元素 g ，使得 $F_{q^m}^* = \{g^i \mid 0 \leq i \leq q^m - 2\}$ ，称 g 为生成元。 $F_{q^m}^*$ 中元素 a 的阶是满足 $a^t = 1$ 的最小正整数 t 。群 $F_{q^m}^*$ 的阶为 $q^m - 1$ ，因此 $t \mid q^m - 1$ 。

设乘法循环群 $F_{q^m}^*$ 的生成元为 g ， $y \in F_{q^m}^*$ ，有限域上离散对数问题是指确定整数 $x \in [0, q^m - 2]$ ，使得 $y = g^x$ 在 $F_{q^m}^*$ 上成立。

3.6.2 椭圆曲线离散对数问题(ECDLP)

已知椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ ($m \geq 1$)，阶为 n 的点 $P \in E(F_{q^m})$ 及 $Q \in \langle P \rangle$ ，椭圆曲线离散对数问题是指确定整数 $l \in [0, n - 1]$ ，使得 $Q = [l]P$ 成立。

4 双线性对及安全曲线

4.1 双线性对

设 $(G_1, +)$ 、 $(G_2, +)$ 和 (G_T, \cdot) 是三个循环群， G_1 、 G_2 和 G_T 的阶均为素数 N ， P_1 是 G_1 的生成元， P_2 是 G_2 的生成元，存在 G_2 到 G_1 的同态映射 ψ 使得 $\psi(P_2) = P_1$;

双线性对 e 是 $G_1 \times G_2 \rightarrow G_T$ 的映射，满足如下条件:

a) 双线性性: 对任意的 $P \in G_1$, $Q \in G_2$, $a, b \in \mathbb{Z}_N$, 有 $e([a]P, [b]Q) = e(P, Q)^{ab}$;

b) 非退化性: $e(P_1, P_2) \neq 1_{G_T}$;

c) 可计算性: 对任意的 $P \in G_1$, $Q \in G_2$ ，存在有效的算法计算 $e(P, Q)$ 。

本部分所用的双线性对定义在椭圆曲线群上，主要有Weil对、Tate对、Ate对、R-ate对等。

4.2 安全性

双线性对的安全性主要建立在以下几个问题的难解性基础之上:

问题 1 (双线性逆 DH(BIDH)) 对 $a, b \in [1, N - 1]$ ，给定 $([a]P_1, [b]P_2)$ ，计算 $e(P_1, P_2)^{b/a}$ 是困难的。

问题 2 (判定性双线性逆 DH(DBIDH)) 对 $a, b, r \in [1, N - 1]$ ，区分 $(P_1, P_2, [a]P_1, [b]P_2, e(P_1, P_2)^{b/a})$ 和 $(P_1, P_2, [a]P_1, [b]P_2, e(P_1, P_2)^r)$ 是困难的。

问题 3 (τ -双线性逆 DH(τ -BDHI)) 对正整数 τ 和 $x \in [1, N - 1]$ ，给定 $(P_1, [x]P_1, P_2, [x]P_2, [x^2]P_2, \dots, [x^\tau]P_2)$ ，计算 $e(P_1, P_2)^{1/x}$ 是困难的。

问题 4 (τ -Gap-双线性逆 DH(τ -Gap-BDHI)) 对正整数 τ 和 $x \in [1, N - 1]$ ，给定 $(P_1, [x]P_1, P_2, [x]P_2, [x^2]P_2, \dots, [x^\tau]P_2)$ 和 DBIDH 确定算法，计算 $e(P_1, P_2)^{1/x}$ 是困难的。

上述问题的难解性是SM9标识密码的安全性的重要基础，这些问题的难解性都意味着 G_1 、 G_2 和 G_T 上的离散对数问题难解，选取的椭圆曲线应首先使得离散对数问题难解。

4.3 嵌入次数及安全曲线

设 G 是椭圆曲线 $E(F_q)$ 的 N 阶子群, 使 $N|q^k-1$ 成立的最小正整数 k 称为子群 G 相对于 N 的嵌入次数, 也称为曲线 $E(F_q)$ 相对于 N 的嵌入次数。

设 G_1 是 $E(F_{q^{d_1}})$ (d_1 整除 k)的 N 阶子群, G_2 是 $E(F_{q^{d_2}})$ (d_2 整除 k)的 N 阶子群, 则椭圆曲线双线性对的值域 G_T 是 F_q^* 的子群, 因此椭圆曲线双线性对可将椭圆曲线离散对数问题转化为有限域 F_q^* 上离散对数问题。嵌入次数越大安全性越高, 但双线性对的计算越困难, 因而需要采用嵌入次数适中且达到安全性标准的椭圆曲线。本文规定 $q^k > 2^{1536}$ 。

本文规定选用如下的曲线:

a) 基域 q 为大于 2^{191} 的素数、嵌入次数 $k=2^i 3^j$ 的常曲线, 其中 $i>0, j\geq 0$;

b) 基域 q 为大于 2^{768} 的素数、嵌入次数 $k=2$ 的超奇异曲线;

对小于 2^{360} 的 N , 建议:

c) $N-1$ 含有大于 2^{190} 的素因子;

d) $N+1$ 含有大于 2^{120} 的素因子。

5 数据类型及其转换

5.1 数据类型

数据类型包括比特串、字节串、域元素、椭圆曲线上的点和整数。

比特串: 有序的 0 和 1 的序列。

字节串: 有序的字节序列, 其中 8 比特为 1 个字节, 最左边的比特为最高位。

域元素: 有限域 F_{q^m} ($m\geq 1$) 中的元素。

椭圆曲线上的点: 椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ ($m\geq 1$) 上的点 P 或者是无穷远点 O , 或者是一对域元素 (x_P, y_P) , 其中域元素 x_P 和 y_P 满足椭圆曲线方程。

点的字节串表示有多种形式, 用一个字节 PC 加以标识。无穷远点 O 的字节串表示是单一的零字节 $PC=00$ 。非无穷远点 $P=(x_P, y_P)$ 有如下三种字节串表示形式:

a) 压缩表示形式, $PC=02$ 或 03 ;

b) 未压缩表示形式, $PC=04$;

混合表示形式, $PC=06$ 或 07 。

注: 混合表示形式既包含压缩表示形式又包含未压缩表示形式。在实现中, 它允许转换到压缩表示形式或者未压缩表示形式。对于椭圆曲线上点的压缩表示形式和混合表示形式, 本文定为可选形式。椭圆曲线上点的压缩表示形式参见附录A.4。

5.2 数据类型转换

5.2.1 数据类型转换关系

图1表示了各种数据类型之间的转换关系, 线上的标志是相应数据转换方法所在的条。

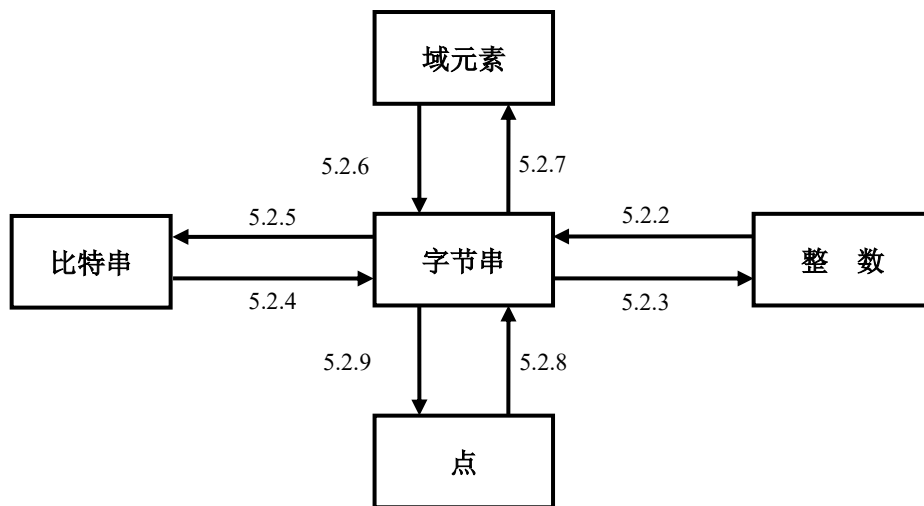


图 1 数据类型和转换约定

5.2.2 整数到字节串的转变

输入：非负整数 x ，以及字节串的目标长度 l (其中 l 满足 $2^{8l} > x$)。

输出：长度为 l 的字节串 M 。

- 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \dots, M_0$ 是 M 的从最左边到最右边的字节；
- M 的字节满足：

$$x = \sum_{i=0}^{l-1} 2^{8i} M_i。$$

5.2.3 字节串到整数的转换

输入：长度为 l 的字节串 M 。

输出：整数 x 。

- 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \dots, M_0$ 是 M 的从最左边到最右边的字节；
- 将 M 转换为整数 x ：

$$x = \sum_{i=0}^{l-1} 2^{8i} M_i。$$

5.2.4 比特串到字节串的转变

输入：长度为 n 的比特串 s 。

输出：长度为 l 的字节串 M ，其中 $l = \lceil n/8 \rceil$ 。

- 设 $s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_0$ 是 s 从最左边到最右边的比特；
- 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \dots, M_0$ 是 M 从最左边到最右边的字节，则
 $M_i = s_{8i+7} s_{8i+6} \dots s_{8i+1} s_{8i}$ ，其中 $0 \leq i < l$ ，当 $8i+j \geq n$ ， $0 < j \leq 7$ 时， $s_{8i+j} = 0$ 。

5.2.5 字节串到比特串的转变

输入：长度为 l 的字节串 M 。

输出：长度为 n 的比特串 s ，其中 $n = 8l$ 。

- 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \dots, M_0$ 是 M 从最左边到最右边的字节；
- 设 $s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_0$ 是 s 从最左边到最右边的比特，则 s_i 是 M_j 右起第 $i-8j+1$ 比特，其中 $j = \lfloor i/8 \rfloor$ 。

5.2.6 域元素到字节串的转变

输入： $F_{q^m}(m \geq 1)$ 中的元素 $\alpha=(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ ， $q=p$ 。

输出：长度 l 的字节串 S ，其中 $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$ 。

- a) 若 $m=1$ ，则 $\alpha=a_0(q=p)$ ， α 必为区间 $[0, q-1]$ 中的整数，按 6.2.2 的细节把 α 转换成长度为 l 的字节串 S ；
- b) 若 $m>1$ ，则 $\alpha=(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0) (q=p)$ ，其中 $a_i \in F_q, i=0, 1, \dots, m-1$ ；
 - 1) 置 $r=\lceil \log_2 q/8 \rceil$ ；
 - 2) 对 i 从 $m-1$ 到 0 执行：
按 6.2.2 的细节把 $a_i(q=p)$ 转换成长度为 r 的字节串 s_i ；
 - 3) $S = s_{m-1} \| s_{m-2} \| \dots \| s_0$ 。

5.2.7 字节串到域元素的转换

情形 1：转换为基域中元素

输入：域 $F_q, q=p$ ，长度为 l 的字节串 $S, l=\lceil \log_2 q/8 \rceil$ 。

输出： F_q 中的元素 α 。

若 $q=p$ ，则按 6.2.3 的细节将 S 转换为整数 α ，若 $\alpha \notin [0, q-1]$ ，则报错；

情形 2：转换为扩域中元素

输入：域 $F_{q^m}(m \geq 2)$ ， $q=p$ ，长度为 l 的字节串 S ，其中 $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$ 。

输出： F_{q^m} 中的元素 α 。

- a) 将字节串 S 平均分成 m 段，每段长度为 l/m ，记作 $S=(S_{m-1}, S_{m-2}, \dots, S_1, S_0)$ ；
- b) 对 i 从 $m-1$ 到 0 执行：
按 6.2.3 的细节将 S_i 转换为整数 a_i ，若 $a_i \notin [0, q-1]$ ，则报错；
- c) 若 $q=p$ ，输出 $\alpha=(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ 。

5.2.8 点到字节串转换

点到字节串转换分为两种情形：一种是在计算过程中，将椭圆曲线点转换为字节串后才能作为某个函数(如杂凑函数)的输入，这种情况下只需直接将点转换为字节串；一种是在传输或存储椭圆曲线点时，为了减少传输的量或存储空间，可采用点的压缩或混合压缩表示形式，这种情况下需要加入一个字节的识别符 PC 来指示点的表示形式。下面分两种情况说明详细的转换过程。

情形 1：直接转换

输入：椭圆曲线 $E(F_{q^m})(m \geq 1)$ 上的点 $P=(x_P, y_P)$ ，且 $P \neq O$ 。

输出：长度为 $2l$ 的字节串 $X_1 \| Y_1$ 。(当 $m=1$ 时， $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil$ ；当 $m>1$ 时， $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$ 。)

- a) 按 6.2.6 中的细节把域元素 x_P 转换成长度为 l 的字节串 X_1 ；
- b) 按 6.2.6 中的细节把域元素 y_P 转换成长度为 l 的字节串 Y_1 ；
- c) 输出字节串 $X_1 \| Y_1$ 。

情形 2：添加一字节识别符 PC 的转换

输入：椭圆曲线 $E(F_q^m)(m \geq 1)$ 上的点 $P=(x_P, y_P)$ ，且 $P \neq O$ 。

输出：字节串 PO 。若选用未压缩表示形式或混合表示形式，则输出字节串长度为 $2l+1$ ；若选用压缩表示形式，则输出字节串长度为 $l+1$ 。(当 $m=1$ 时， $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil$ ；当 $m>1$ 时， $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$ 。)

- a) 按 6.2.6 中的细节把域元素 x_P 转换成长度为 l 的字节串 X_1 ；
- b) 若选用压缩表示形式，则：
 - 1) 计算比特 \tilde{y}_P ；(参见附录 A.4。)
 - 2) 若 $\tilde{y}_P = 0$ ，则令 $PC = 02$ ；若 $\tilde{y}_P = 1$ ，则令 $PC = 03$ ；
 - 3) 字节串 $PO = PC \| X_1$ ；
- c) 若选用未压缩表示形式，则：
 - 1) 按 6.2.6 的细节把域元素 y_P 转换成长度为 l 的字节串 Y_1 ；
 - 2) 令 $PC = 04$ ；
 - 3) 字节串 $PO = PC \| X_1 \| Y_1$ ；
- d) 若选用混合表示形式，则：
 - 1) 按 6.2.6 的细节把域元素 y_P 转换成长度为 l 的字节串 Y_1 ；
 - 2) 计算比特 \tilde{y}_P ；(参见附录 A.4。)
 - 3) 若 $\tilde{y}_P = 0$ ，则令 $PC = 06$ ；若 $\tilde{y}_P = 1$ ，则令 $PC = 07$ ；
 - 4) 字节串 $PO = PC \| X_1 \| Y_1$ 。

5.2.9 字节串到点的转换

字节串到点的转换是 6.2.8 的逆过程。下面也分两种情况加以说明。

情形 1：直接转换

输入：定义 $F_q^m(m \geq 1)$ 上椭圆曲线的域元素 a, b ，长度为 $2l$ 的字节串 $X_1 \| Y_1$ ， X_1, Y_1 的长度均为 l (当 $m=1$ 时， $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil$ ；当 $m>1$ 时， $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$)。

输出：椭圆曲线上的点 $P=(x_P, y_P)$ ，且 $P \neq O$ 。

- a) 按 6.2.7 的细节把字节串 X_1 转换成域元素 x_P ；
- b) 按 6.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_P 。

情形 2：包含一字节识别符 PC 的字节串的转换

输入：定义 $F_q^m(m \geq 1)$ 上椭圆曲线的域元素 a, b ，字节串 PO 。若选用未压缩表示形式或混合表示形式，则字节串 PO 长度为 $2l+1$ ；若选用压缩表示形式，则字节串 PO 长度为 $l+1$ (当 $m=1$ 时， $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil$ ；当 $m>1$ 时， $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$)。

输出：椭圆曲线上的点 $P=(x_P, y_P)$ ，且 $P \neq O$ 。

- a) 若选用压缩表示形式，则 $PO = PC \| X_1$ ；若选用未压缩表示形式或混合表示形式，则 $PO = PC \| X_1 \| Y_1$ ，其中 PC 是单一字节， X_1 和 Y_1 都是长度为 l 的字节串；
- b) 按 6.2.7 的细节把字节串 X_1 转换成域元素 x_P ；
- c) 若选用压缩表示形式，则：
 - 1) 检验 $PC=02$ 或者是 $PC=03$ ，若不是这种情形，则报错；
 - 2) 若 $PC=02$ ，则令 $\tilde{y}_P = 0$ ；若 $PC=03$ ，则令 $\tilde{y}_P = 1$ ；
 - 3) 将 (x_P, \tilde{y}_P) 转换为椭圆曲线上的一个点 (x_P, y_P) ；(参见附录 A.4。)
- d) 若选用未压缩表示形式，则：

- 1) 检验 $PC=04$, 若不是这种情形, 则报错;
- 2) 按 6.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_P ;
- e) 若选用混合表示形式, 则:
 - 1) 检验 $PC=06$ 或者 $PC=07$, 若不是这种情形, 则报错;
 - 2) 执行步骤 e.2.1) 或者 e.2.2):
 - 按 6.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_P ;
 - 若 $PC=06$, 则令 $\tilde{y}_P=0$, 否则令 $\tilde{y}_P=1$;
 将 (x_P, \tilde{y}_P) 转换为椭圆曲线上的一个点 (x_P, y_P) ; (参见附录 A.4。)
- f) 验证 (x_P, y_P) 是否满足曲线方程, 若不满足, 则报错;
- g) $P=(x_P, y_P)$ 。

6 系统参数及其验证

6.1 系统参数

系统参数包括:

- a) 曲线的识别符 cid , 用一个字节表示: $0x10$ 表示 F_q (素数 $q>3$) 上常曲线, $0x11$ 表示 F_q 上超奇异曲线, $0x12$ 表示 F_q 上常曲线及其扭曲线;
- b) 椭圆曲线基域 F_q 的参数: 基域参数为大于 3 的素数 q ;
- c) F_q 中的两个元素 a 和 b , 它们定义椭圆曲线 E 的方程: $y^2=x^3+ax+b$; 扭曲线参数 β (若 cid 的低 4 位为 2);
- d) 余因子 cf 和素数 N , 其中 $cf \times N = \#E(F_q)$, 规定 $N > 2^{191}$ 且 N 不整除 cf , 如果 N 小于 2^{360} , 建议 $N-1$ 含有大于 2^{190} 的素因子, $N+1$ 含有大于 2^{120} 的素因子;
- e) 曲线 $E(F_q)$ 相对于 N 的嵌入次数 k (N 阶循环群 $(\mathcal{G}_T, \cdot) \subset F_q^*$), 规定 $q^k > 2^{1536}$;
- f) N 阶循环群 $(\mathcal{G}_1, +)$ 的生成元 $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1})$, $P_1 \neq O$;
- g) N 阶循环群 $(\mathcal{G}_2, +)$ 的生成元 $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2})$, $P_2 \neq O$;
- h) 双线性对 $e: \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_T$, 用一个字节的识别符 eid 表示: $0x01$ 表示 Tate 对, $0x02$ 表示 Weil 对, $0x03$ 表示 Ate 对, $0x04$ 表示 R-ate 对;
- i) (选项) 参数 d_1, d_2 , 其中 d_1, d_2 整除 k ;
- j) (选项) \mathcal{G}_2 到 \mathcal{G}_1 的同态映射 ψ , 使得 $P_1 = \psi(P_2)$ 。
- k) (选项) BN 曲线的基域特征 q , 曲线阶 r , Frobenius 映射的迹 tr 可通过参数 t 来确定, t 至少达到 63 比特。

6.2 系统参数的验证

下面的条件应由系统参数的生成者加以验证。这些条件也能由系统参数的用户验证。

输入: 系统参数集合。

输出: 若所有参数有效, 则输出“有效”; 否则输出“无效”。

- a) 验证 q 是大于 3 的素数(参见附录 C.1.5);
- b) 验证 a, b 是区间 $[0, q-1]$ 中的整数;
- c) 验证在 F_q 上 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$; 若 cid 的低 4 位为 2, 验证 β 是非平方元(参见附录 C.1.4.3.1);
- d) 验证 N 为大于 2^{191} 的素数且 N 不整除 cf , 如果 N 小于 2^{360} , 验证 $N-1$ 含有大于 2^{190} 的素因子, $N+1$ 含有大于 2^{120} 的素因子;
- e) 验证 $|q+1-cf \times N| < 2q^{1/2}$;

- f) 验证 $q^k > 2^{1536}$, 且 k 为使 $N|(q^m-1)$ 成立的最小正整数 m ;
- g) 验证 (x_{P_1}, y_{P_1}) 是群 G_1 中的元素;
- h) 验证 (x_{P_2}, y_{P_2}) 是群 G_2 中的元素;
- i) 验证 $e(P_1, P_2) \in F_{q^k}^* \setminus \{1\}$, 且 $e(P_1, P_2)^N = 1$;
- j) (选项) 验证 d_1, d_2 整除 k ;
- k) (选项) 验证 $P_1 = \psi(P_2)$;
- l) (选项) 验证 t 至少达到 63 比特。

若以上任何一项验证失败, 则输出“无效”; 否则, 输出“有效”。

附录 A 关于椭圆曲线的背景知识

A.1 有限域

A.1.1 素域 F_p

设 p 是一个素数，整数模 p 的全体余数的集合 $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ 关于模 p 的加法和乘法构成一个 p 阶素域，用符号 F_p 表示。加法单位元是 0，乘法单位元是 1， F_p 的元素满足如下运算法则：

——**加法**：设 $a, b \in F_p$ ，则 $a + b = r$ ，其中 $r = (a + b) \bmod p$ ， $r \in [0, p-1]$ 。

——**乘法**：设 $a, b \in F_p$ ，则 $a \cdot b = s$ ，其中 $s = (a \cdot b) \bmod p$ ， $s \in [0, p-1]$ 。

记 F_p^* 是由 F_p 中所有非零元构成的乘法群，由于 F_p^* 是循环群，所以在 F_p 中至少存在一个元素 g ，使得 F_p 中任一非零元都可以由 g 的一个方幂表示，称 g 为 F_p^* 的生成元 (或本原元)，即 $F_p^* = \{g^i \mid 0 \leq i \leq p-2\}$ 。设 $a = g^i \in F_p^*$ ，其中 $0 \leq i \leq p-2$ ，则 a 的乘法逆元为： $a^{-1} = g^{p-1-i}$

示例 1：素域 F_{19} ， $F_{19} = \{0, 1, 2, \dots, 18\}$ 。

F_{19} 中加法的示例： $10, 14 \in F_{19}$ ， $10+14=24$ ， $24 \bmod 19 = 5$ ，则 $10+14=5$ 。

F_{19} 中乘法的示例： $7, 8 \in F_{19}$ ， $7 \times 8 = 56$ ， $56 \bmod 19 = 18$ ，则 $7 \cdot 8 = 18$ 。

13 是 F_{19}^* 的一个生成元，则 F_{19}^* 中元素可由 13 的方幂表示出来：

$$13^0 = 1, 13^1 = 13, 13^2 = 17, 13^3 = 12, 13^4 = 4, 13^5 = 14, 13^6 = 11, 13^7 = 10, 13^8 = 16, 13^9 = 18,$$

$$13^{10} = 6, 13^{11} = 2, 13^{12} = 7, 13^{13} = 15, 13^{14} = 5, 13^{15} = 8, 13^{16} = 9, 13^{17} = 3, 13^{18} = 1。$$

A.1.2 有限域 F_{q^m}

设 q 是一个素数或素数方幂， $f(x)$ 是多项式环 $F_q[x]$ 上的一个 m ($m > 1$) 次不可约多项式 (称为约化多项式或域多项式)，商环 $F_q[x]/(f(x))$ 是含 q^m 个元素的有限域 (记为 F_{q^m})，称 F_{q^m} 是有限域 F_q 的扩域，域 F_q 为域 F_{q^m} 的子域， m 为扩张次数。 F_{q^m} 可以看成 F_q 上的 m 维向量空间，也就是说，在 F_{q^m} 中存在 m 个元素 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ ，使得 $\forall a \in F_{q^m}$ ， a 可以唯一表示为： $a = a_{m-1}\alpha_{m-1} + \dots + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_0$ ，其中 $a_i \in F_q$ ，称 $\{\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0\}$ 为 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基。给定这样一组基，就可以由向量 $(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ 来表示域元素 a 。

F_{q^m} 在 F_q 上的基有多种选择：多项式基和正规基等。

不可约多项式 $f(x)$ 可取为首一的多项式 $f(x) = x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \dots + f_2x^2 + f_1x + f_0$ (其中 $f_i \in F_q$ ， $i=0, 1, \dots, m-1$)， F_{q^m} 中的元素由多项式环 $F_q[x]$ 中所有次数低于 m 的多项式构成，即 $F_{q^m} = \{a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0 \mid a_i \in F_q, i=0, 1, \dots, m-1\}$ 。多项式集合 $\{x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x, 1\}$ 是 F_{q^m} 作为向量空间在 F_q 上的一组基，称为多项式基。当 m 含有因子 d ($1 < d < m$) 时， F_{q^m} 可以由 F_{q^d} 扩张生成，从 $F_{q^d}[x]$ 中选取一个合适的 m/d 次不可约多项式作为 F_{q^m} 在 F_{q^d} 上的约化多项式， F_{q^m} 可以由塔式扩张方法 (towering method) 得到，这种扩张的基本形式仍是由 F_q 中元素组成的向量。例如当 $m=6$ 时，可以先由 F_q 经过 3 次扩张得扩域 F_{q^3} ，再由 F_{q^3} 经过 2 次扩张得到扩域 F_{q^6} ；也可以先由 F_q 经过 2 次扩张得扩域 F_{q^2} ，再由 F_{q^2} 经过 3 次扩张得到扩域 F_{q^6} 。

F_{q^m} 在 F_q 上形如 $\{\beta, \beta^q, \beta^{q^2}, \dots, \beta^{q^{m-1}}\}$ 的一组基称为正规基，其中 $\beta \in F_{q^m}$ 。 $\forall a \in F_{q^m}$ ， a 可以唯一表示为： $a = a_0\beta + a_1\beta^q + \dots + a_{m-1}\beta^{q^{m-1}}$ ，其中 $a_i \in F_q$ ， $i=0, 1, \dots, m-1$ 。对于任意有限域 F_q 及其扩域 F_{q^m} ，这样的基总是存在的。

如果不作特别说明， F_{q^m} 中元素均采用多项式基表示。

域元素 $a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0$ 相对于多项式基可以由向量 $(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ 表示，所以 $F_{q^m} = \{(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0) \mid a_i \in F_q, i=0, 1, \dots, m-1\}$ 。

乘法单位元 1 由 $(0, \dots, 0, 1)$ 表示，零元由 $(0, \dots, 0, 0)$ 表示。域元素的加法和乘法定义如下：

——加法运算

$\forall (a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0), (b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_1, b_0) \in F_q^m$, 则 $(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0) + (b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_1, b_0) = (c_{m-1}, c_{m-2}, \dots, c_1, c_0)$, 其中 $c_i = a_i + b_i \in F_q, i = 0, 1, \dots, m-1$, 亦即, 加法运算按分量执行域 F_q 的加法运算。

——乘法运算

$\forall (a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0), (b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_1, b_0) \in F_q^m$, 则 $(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0) \cdot (b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_1, b_0) = (r_{m-1}, r_{m-2}, \dots, r_1, r_0)$, 其中多项式 $(r_{m-1}x^{m-1} + r_{m-2}x^{m-2} + \dots + r_1x + r_0)$ 是 $(a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0) \cdot (b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_1x + b_0)$ 在 $F_q[x]$ 中模 $f(x)$ 的余式。

F_{q^m} 恰包含 q^m 个元素。记 $F_{q^m}^*$ 是由 F_{q^m} 中所有非零元构成的乘法群, $F_{q^m}^*$ 是循环群, 在 F_{q^m} 中至少存在一个元素 g , 使得 F_{q^m} 中任一非零元都可以由 g 的一个方幂表示, 称 g 为 $F_{q^m}^*$ 的生成元 (或本原元), 即: $F_{q^m}^* = \{g^i | 0 \leq i \leq q^m - 2\}$ 。设 $a = g^i \in F_{q^m}^*$, 其中 $0 \leq i \leq q^m - 2$, 则 a 的乘法逆元为: $a^{-1} = g^{q^m - 1 - i}$ 。

示例 2: F_{3^2} 的多项式基表示

取 F_3 上的一个不可约多项式 $f(x) = x^2 + 1$, 则 F_{3^2} 中的元素是:

$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$

加法: $(2, 1) + (2, 0) = (1, 1)$

乘法: $(2, 1) \cdot (2, 0) = (2, 2)$

$$(2x+1) \cdot 2x = 4x^2 + 2x$$

$$= x^2 + 2x$$

$$\equiv 2x + 2 \pmod{f(x)}$$

即 $2x+2$ 是 $(2x+1) \cdot 2x$ 除以 $f(x)$ 的余式。

乘法单位元是 $(0, 1)$, $\alpha = x+1$ 是 $F_{3^2}^*$ 的一个生成元, 则 α 的方幂为:

$$\alpha^0 = (0, 1), \quad \alpha^1 = (1, 1), \quad \alpha^2 = (2, 0), \quad \alpha^3 = (2, 1), \quad \alpha^4 = (0, 2), \quad \alpha^5 = (2, 2),$$

$$\alpha^6 = (1, 0), \quad \alpha^7 = (1, 2), \quad \alpha^8 = (0, 1)。$$

A. 1. 3 有限域上的椭圆曲线

A. 1. 3. 1 概述

有限域上椭圆曲线常用的表示形式有两种: 仿射坐标表示和射影坐标表示。

A. 1. 3. 2 仿射坐标表示

设 p 是大于 3 的素数, F_{p^m} 上椭圆曲线方程在仿射坐标系下可以简化为 $y^2 = x^3 + ax + b$, 其中 $a, b \in F_{p^m}$, 且使得 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ 。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_{p^m}) = \{(x, y) | x, y \in F_{p^m}, \text{ 且满足曲线方程 } y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{O\}$, 其中 O 是椭圆曲线的无穷远点, 又称为零点。

$E(F_{p^m}) (m \geq 1)$ 上的点按照下面的加法运算规则, 构成一个交换群:

a) $O + O = O$;

b) $\forall P = (x, y) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P + O = O + P = P$;

c) $\forall P = (x, y) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P$ 的逆元素 $-P = (x, -y), P + (-P) = O$;

d) 点 $P_1 = (x_1, y_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_2 = (x_2, y_2) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_3 = (x_3, y_3) = P_1 + P_2 \neq O$, 则

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1, \end{cases}$$

其中

$$\lambda = \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \text{若 } x_1 \neq x_2, \\ \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}, & \text{若 } x_1 = x_2 \text{ 且 } P_2 \neq -P_1. \end{cases}$$

示例 3: 有限域 F_{19} 上一条椭圆曲线

F_{19} 上方程: $y^2=x^3+x+1$, 其中 $a=1, b=1$ 。则 F_{19} 上曲线的点为:

$(0, 1), (0, 18), (2, 7), (2, 12), (5, 6), (5, 13), (7, 3), (7, 16), (9, 6), (9, 13), (10, 2), (10, 17), (13, 8), (13, 11), (14, 2), (14, 17), (15, 3), (15, 16), (16, 3), (16, 16)$

则 $E(F_{19})$ 有 21 个点 (包括无穷远点 O)。

a) 取 $P_1=(10,2), P_2=(9,6)$, 计算 $P_3=P_1+P_2$:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{9-10} = \frac{4}{-1} = -4 \equiv 15 \pmod{19},$$

$$x_3 = 15^2 - 10 - 9 = 225 - 10 - 9 = 16 - 10 - 9 = -3 \equiv 16 \pmod{19},$$

$$y_3 = 15 \times (10 - 16) - 2 = 15 \times (-6) - 2 = -3 \equiv 16 \pmod{19},$$

所以 $P_3=(16,3)$ 。

b) 取 $P_1=(10,2)$, 计算 $[2]P_1$:

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} = \frac{3 \times 10^2 + 1}{2 \times 2} = \frac{3 \times 5 + 1}{4} = \frac{16}{4} = 4 \pmod{19},$$

$$x_3 = 4^2 - 10 - 10 = -4 \equiv 15 \pmod{19},$$

$$y_3 = 4 \times (10 - 15) - 2 = -22 \equiv 16 \pmod{19},$$

所以 $[2]P_1=(15,16)$ 。

A. 1. 3. 3 射影坐标表示

A. 1. 3. 3. 1 标准摄影坐标系

设 p 是大于 3 的素数, F_p 上椭圆曲线方程在标准射影坐标系下可以简化为 $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$, 其中 $a, b \in F_p$, 且 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ 。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_p) = \{(x, y, z) | x, y, z \in F_p \text{ 且满足曲线方程 } y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\}$ 。对于 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) , 若存在某个 $u \in F_p$ 且 $u \neq 0$, 使得: $x_1 = ux_2, y_1 = uy_2, z_1 = uz_2$, 则称这两个三元组等价, 表示同一个点。

若 $z \neq 0$, 记 $X = x/z, Y = y/z$, 则可从标准射影坐标表示转化为仿射坐标表示: $Y^2 = X^3 + aX + b$;

若 $z = 0$, $(0, 1, 0)$ 对应的仿射坐标系下的点即无穷远点 O 。

标准射影坐标系下, $E(F_p)$ 上点的加法运算定义如下:

a) $O + O = O$;

b) $\forall P = (x, y, z) \in E(F_p) \setminus \{O\}, P + O = O + P = P$;

c) $\forall P = (x, y, z) \in E(F_p) \setminus \{O\}, P$ 的逆元素 $-P = (ux, -uy, uz), u \in F_p$ 且 $u \neq 0, P + (-P) = O$;

d) 设点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E(F_p) \setminus \{O\}, P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E(F_p) \setminus \{O\}, P_3 = P_1 + P_2 = (x_3, y_3, z_3) \neq O$, 若 $P_1 \neq P_2$, 则:

$$\lambda_1 = x_1 z_2, \quad \lambda_2 = x_2 z_1, \quad \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \lambda_4 = y_1 z_2, \quad \lambda_5 = y_2 z_1, \quad \lambda_6 = \lambda_4 - \lambda_5, \quad \lambda_7 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda_8 = z_1 z_2,$$

$$\lambda_9 = \lambda_3^2, \quad \lambda_{10} = \lambda_3 \lambda_9, \quad \lambda_{11} = \lambda_8 \lambda_6^2 - \lambda_7 \lambda_9, \quad x_3 = \lambda_3 \lambda_{11}, \quad y_3 = \lambda_6 (\lambda_9 \lambda_1 - \lambda_{11}) - \lambda_4 \lambda_{10}, \quad z_3 = \lambda_{10} \lambda_8;$$

若 $P_1 = P_2$, 则:

$$\lambda_1 = 3x_1^2 + az_1^2, \quad \lambda_2 = 2y_1 z_1, \quad \lambda_3 = y_1^2, \quad \lambda_4 = \lambda_3 x_1 z_1, \quad \lambda_5 = \lambda_2^2, \quad \lambda_6 = \lambda_1^2 - 8\lambda_4,$$

$$x_3 = \lambda_2 \lambda_6, \quad y_3 = \lambda_1 (4\lambda_4 - \lambda_6) - 2\lambda_5 \lambda_3, \quad z_3 = \lambda_2 \lambda_5.$$

A. 1. 3. 3. 2 Jacobian加重射影坐标系

设 p 是大于 3 的素数, F_{p^m} 上椭圆曲线方程在 Jacobian 加重射影坐标系下可以简化为 $y^2 = x^3 + axz^4 + bz^6$ 。其中 $a, b \in F_{p^m}$, 且 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ 。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_{p^m}) = \{(x, y, z) | x, y, z \in F_{p^m} \text{ 且满足曲线方程 } y^2 = x^3 + axz^4 + bz^6\}$ 。对于 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) , 若存在某个 $u \in F_{p^m}$ 且 $u \neq 0$, 使得: $x_1 = u^2x_2, y_1 = u^3y_2, z_1 = uz_2$, 则称这两个三元组等价, 表示同一个点。

若 $z \neq 0$, 记 $X = x/z^2, Y = y/z^3$, 则可从 Jacobian 加重射影坐标表示转化为仿射坐标表示: $Y^2 = X^3 + aX + b$;

若 $z = 0$, $(1, 1, 0)$ 对应的仿射坐标系下的点即无穷远点 O 。

Jacobian 加重射影坐标系下, $E(F_{p^m})$ 上点的加法运算定义如下:

- a) $O + O = O$;
- b) $\forall P = (x, y, z) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P + O = O + P = P$;
- c) $\forall P = (x, y, z) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P$ 的逆元素 $-P = (u^2x, -u^3y, uz), u \in F_{p^m}$ 且 $u \neq 0, P + (-P) = O$;
- d) 设点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_3 = P_1 + P_2 = (x_3, y_3, z_3) \neq O$,

若 $P_1 \neq P_2$, 则:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x_1 z_2^2, \quad \lambda_2 = x_2 z_1^2, \quad \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \lambda_4 = y_1 z_2^3, \quad \lambda_5 = y_2 z_1^3, \quad \lambda_6 = \lambda_4 - \lambda_5, \quad \lambda_7 = \lambda_1 + \lambda_2, \\ \lambda_8 &= \lambda_4 + \lambda_5, \quad \lambda_9 = \lambda_7 \lambda_3^2, \quad x_3 = \lambda_6^2 - \lambda_9, \quad \lambda_{10} = \lambda_9^2 - 2x_3, \quad y_3 = (\lambda_{10} \lambda_6 - \lambda_8 \lambda_3^3)/2, \quad z_3 = z_1 z_2 \lambda_3; \end{aligned}$$

若 $P_1 = P_2$, 则:

$$\lambda_1 = 3x_1^2 + az_1^4, \quad \lambda_2 = 4x_1 y_1^2, \quad \lambda_3 = 8y_1^4, \quad x_3 = \lambda_1^2 - 2\lambda_2, \quad y_3 = \lambda_1(\lambda_2 - x_3) - \lambda_3, \quad z_3 = 2y_1 z_1。$$

A. 1. 4 有限域上椭圆曲线的阶

有限域 F_{q^m} 上一条椭圆曲线的阶是指点集 $E(F_{q^m})$ 中元素的个数, 记为 $\#E(F_{q^m})$ 。由 Hasse 定理知: $q^{m+1} - 2q^{m/2} \leq \#E(F_{q^m}) \leq q^{m+1} + 2q^{m/2}$, 即 $\#E(F_{q^m}) = q^{m+1} - t$, 其中 t 称为 Frobenius 迹且 $|t| \leq 2q^{m/2}$ 。

若 F_{q^m} 的特征整除 Frobenius 迹 t , 则称此曲线为超奇异的, 否则为非超奇异的。

设 $E(F_{q^m})$ 是 F_{q^m} 上的椭圆曲线, r 是与 q^m 互素的整数, 则 $E(F_{q^m})$ 的 r 阶扭子群 $E(F_{q^m})[r] = \{P \in E(F_{q^m}) | [r]P = O\}$, $E(F_{q^m})[r]$ 中的点称为 r -扭点。

A. 2 椭圆曲线多倍点运算

椭圆曲线上同一个点的重复相加称为该点的多倍点运算。设 u 是一个正整数, P 是椭圆曲线上的点, 其 u 倍点 $Q = [u]P = \underbrace{P + P + \dots + P}_{u \uparrow}$ 。

多倍点运算可以扩展到 0 倍点运算和负数倍点运算: $[0]P = O, [-u]P = [u](-P)$ 。

椭圆曲线多倍点运算的实现有多种方法, 这里只介绍最基本的三种方法, 以下都假设 $1 \leq u < N$ 。

算法一: 二进制展开法

输入: 点 P , l 比特的整数 $u = \sum_{j=0}^{l-1} u_j 2^j, u_j \in \{0, 1\}$ 。

输出: $Q = [u]P$ 。

- a) 置 $Q = O$;
- b) 对 j 从 $l-1$ 降至 0 执行:
 - b.1) $Q = [2]Q$;

- b.2) 若 $u_j=1$ 则 $Q = Q + P$;
- c) 输出 Q 。

算法二：加减法

输入：点 P , l 比特的整数 $u = \sum_{j=0}^{l-1} u_j 2^j$, $u_j \in \{0,1\}$ 。

输出： $Q=[u]P$ 。

- a) 设 $3u$ 的二进制表示是 $h_r h_{r-1} \cdots h_1 h_0$, 其中最高位 h_r 为 1, 显然 $r = l$ 或 $l+1$;
- b) 设 u 的二进制表示是 $u_r u_{r-1} \cdots u_1 u_0$;
- c) 置 $Q = P$;
- d) 对 i 从 $r-1$ 降至 1 执行:
 - d.1) $Q = [2]Q$;
 - d.2) 若 $h_i = 1$, 且 $u_i = 0$, 则 $Q = Q + P$;
 - d.3) 若 $h_i = 0$, 且 $u_i = 1$, 则 $Q = Q - P$;
- e) 输出 Q 。

注：减去点 (x, y) , 只要加上 $(x, -y)$ 。有多种不同的变种可以加速这一运算。

算法三：滑动窗法

输入：点 P , l 比特的整数 $u = \sum_{j=0}^{l-1} u_j 2^j$, $u_j \in \{0,1\}$ 。

输出： $Q=[u]P$ 。

设窗口长度 $r > 1$ 。

预计算

- a) $P_1 = P, P_2 = [2]P$;
- b) i 从 1 到 $2^{r-1}-1$ 计算 $P_{2i+1} = P_{2i-1} + P_2$;
- c) 置 $j = l-1, Q = O$ 。

主循环

- d) 当 $j \geq 0$ 执行:
 - d.1) 若 $u_j = 0$, 则 $Q = [2]Q, j = j-1$;
 - d.2) 否则
 - d.2.1) 令 t 是使 $j-t+1 \leq r$ 且 $u_t = 1$ 的最小整数;
 - d.2.2) $h_j = \sum_{i=0}^{j-t} u_{t+i} 2^i$;
 - d.2.3) $Q = [2^{j-t+1}]Q + P_{h_j}$;
 - d.2.4) 置 $j = t-1$;
- e) 输出 Q 。

A.3 离散对数问题

A.3.1 求解有限域上离散对数问题的方法

有限域 F_q 的全体非零元素构成一个乘法循环群, 记为 F_q^* 。 F_q^* 中存在一个元素 g , g 称为生成元,

使得 $F_q^* = \{g^i \mid 0 \leq i \leq q-2\}$ 。 $a \in F_q$ 的阶是满足 $a^t = 1$ 的最小正整数 t 。循环群 F_q^* 的阶为 $q-1$ ，因此 $t \mid q-1$ 。

设乘法循环群 F_q^* 的生成元为 g ， $y \in F_q^*$ ，有限域上离散对数问题是指确定整数 $x \in [0, q-2]$ ，使得 $y = g^x \bmod q$ 成立。

有限域上离散对数问题现有攻击方法有：

- a) Pohlig-Hellman方法：设 l 是 $q-1$ 的最大素因子，则时间复杂度为 $O(l^{1/2})$ ；
- b) BSGS方法：时间复杂度与空间复杂度均为 $(\pi q/2)^{1/2}$ ；
- c) Pollard方法：时间复杂度为 $(\pi q/2)^{1/2}$ ；
- d) 并行Pollard方法：设 s 为并行处理器个数，时间复杂度为 $(\pi q/2)^{1/2}/s$ ；
- e) 线性筛法(对素域 F_q)：时间复杂度为 $\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log \log q)^{1/2})$ ；
- f) Gauss整数法(对素域 F_q)：时间复杂度为 $\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log \log q)^{1/2})$ ；
- g) 剩余列举筛法(对素域 F_q)：时间复杂度为 $\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log \log q)^{1/2})$ ；
- h) 数域筛法(对素域 F_q)：时间复杂度为 $\exp(((64/9)^{1/3} + o(1))(\log q)(\log \log q)^2)^{1/3})$ ；
- i) 函数域筛法（对小特征域）：时间复杂度为 $\exp(c(\log q)(\log \log q)^2)^{1/4+o(1)}$ 和拟多项式时间。

从以上列举的求解离散对数问题的方法及其时间复杂度可知：对于一般的大特征域上的离散对数问题，存在亚指数级计算复杂度的攻击方法，对小特征域上的离散对数问题，目前已经有拟多项式时间的攻击方法。

A. 3.2 求解椭圆曲线离散对数问题的方法

已知椭圆曲线 $E(F_q)$ ，阶为 n 的点 $P \in E(F_q)$ 及 $Q \in \langle P \rangle$ ，椭圆曲线离散对数问题是指确定整数 $u \in [0, n-1]$ ，使得 $Q = [u]P$ 成立。

ECDLP 现有攻击方法有：

- a) Pohlig-Hellman方法：设 l 是 n 的最大素因子，则时间复杂度为 $O(l^{1/2})$ ；
- b) BSGS方法：时间复杂度与空间复杂度均为 $(\pi n/2)^{1/2}$ ；
- c) Pollard方法：时间复杂度为 $(\pi n/2)^{1/2}$ ；
- d) 并行Pollard方法：设 r 为并行处理器个数，时间复杂度为 $(\pi n/2)^{1/2}/r$ ；
- e) MOV-方法：把超奇异椭圆曲线及具有相似性质的曲线的ECDLP降到 F_q 的小扩域上的离散对数问题(亚指数级计算复杂度算法)；
- f) Anomalous方法：对Anomalous曲线($\#E(F_q)=q$ 的曲线)的有效攻击方法(多项式级计算复杂度算法)；
- g) GHS-方法：利用Weil下降技术求解扩张次数为合数的二元扩域上椭圆曲线离散对数问题，将ECDLP转化为超椭圆曲线离散对数问题，而求解高亏格的超椭圆曲线离散对数存在亚指数级计算复杂度算法。
- h) DGS-点分解方法：对低次扩域上的椭圆曲线离散对数利用的指标计算方法，在某些特殊情况下，其求解复杂度低于平方根时间复杂度。

从上述对椭圆曲线离散对数问题解法的描述与分析可知：对于一般曲线的离散对数问题，目前的求解方法都为指数级计算复杂度，未发现亚指数级计算复杂度的一般攻击方法；而对于某些特殊曲线的离散对数问题，存在多项式级或者亚指数级计算复杂度算法。

A. 4 点的压缩

A. 4. 1 概述

对于椭圆曲线 $E(F_q)$ 上的任意非无穷远点 $P=(x_P, y_P)$ ，该点能由坐标 x_P 及由 x_P 和 y_P 导出的一个特定比特简洁地表示，称为点的压缩表示。

A. 4. 2 F_p 上椭圆曲线点的压缩与解压缩方法

设 $P=(x_P, y_P)$ 是定义在 F_p 上椭圆曲线 $E: y^2 = x^3 + ax + b$ 上的一个点， \tilde{y}_P 为 y_P 的最右边的一个比特，则点 P 可由 x_P 和比特 \tilde{y}_P 表示。

由 x_P 和 \tilde{y}_P 恢复 y_P 的方法如下：

- 在 F_p 上计算域元素 $\alpha = x_P^3 + ax_P + b$ ；
- 计算 α 在 F_p 上的平方根 β (参见附录C.1.4)，若输出是“不存在平方根”，则报错；
- 若 β 的最右边比特等于 \tilde{y}_P ，则置 $y_P = \beta$ ；否则置 $y_P = p - \beta$ 。

A. 4. 3 F_{q^m} (q 为奇素数， $m \geq 2$)上椭圆曲线点的压缩与解压缩方法

设 $P=(x_P, y_P)$ 是定义在 F_{q^m} 上椭圆曲线 $E: y^2 = x^3 + ax + b$ 上的一个点，则 y_P 可表示为 $(y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_1, y_0)$ ， \tilde{y}_P 为 y_0 的最右边的一个比特，则点 P 可由 x_P 和比特 \tilde{y}_P 表示。

由 x_P 和 \tilde{y}_P 恢复 y_P 的方法如下：

- 在 F_{q^m} 上计算域元素 $\alpha = x_P^3 + ax_P + b$ ；
- 计算 α 在 F_{q^m} 上的平方根 β (参见附录C.1.4)，若输出是“不存在平方根”，则报错；
若 β 的表示 $(\beta_{m-1}, \beta_{m-2}, \dots, \beta_1, \beta_0)$ 中 β_0 的最右边比特等于 \tilde{y}_P ，则置 $y_P = \beta$ ；否则置 $y_P = (\beta'_{m-1}, \beta'_{m-2}, \dots, \beta'_{-1}, \beta'_0)$ ，其中 $\beta'_i = (q - \beta_i) \in F_q$ ， $i=0, 1, \dots, m-1$ 。

附 录 B

椭圆曲线上双线性对的计算

B.1 概述

设有限域 F_q 上椭圆曲线为 $E(F_q)$ ，若 $\#E(F_q)=cf \times r$ ， r 是素数且 $\gcd(r, q)=1$ ， cf 为余因子，则使 $r|q^k-1$ 的最小正整数 k 称为椭圆曲线相对于 r 的嵌入次数。若 \mathcal{G} 是 $E(F_q)$ 的 r 阶子群，则 \mathcal{G} 的嵌入次数也是 k 。

设 \bar{F}_q 是有限域 F_q 的代数闭包， $E[r]$ 表示 $E(\bar{F}_q)$ 中所有 r 阶点的集合。

B.2 Miller算法

设 F_{q^k} 上椭圆曲线 $E(F_{q^k})$ 的方程为 $y^2=x^3+ax+b$ ，定义过 $E(F_{q^k})$ 上点 U 和 V 的直线为 $g_{U,V}: E(F_{q^k}) \rightarrow F_{q^k}$ ，若过 U, V 两点的直线方程为 $\lambda x + \delta y + \tau = 0$ ，则令函数 $g_{U,V}(Q) = \lambda x_Q + \delta y_Q + \tau$ ，其中 $Q=(x_Q, y_Q)$ 。当 $U=V$ 时， $g_{U,V}$ 定义为过点 U 的切线；若 U 和 V 中有一个点为无穷远点 O ， $g_{U,V}$ 就是过另一个点且垂直于 x 轴的直线。一般用 g_U 作为 $g_{U,O}$ 的简写。

记 $U=(x_U, y_U)$ ， $V=(x_V, y_V)$ ， $Q=(x_Q, y_Q)$ ， $\lambda_1=(3x_V^2+a)/(2y_V)$ ， $\lambda_2=(y_U-y_V)/(x_U-x_V)$ ，则有以下性质：

- a) $g_{U,V}(O)=g_{U,O}(Q)=g_{O,V}(Q)=1$;
- b) $g_{V,V}(Q)=\lambda_1(x_Q-x_V)-y_Q+y_V$ ， $Q \neq O$;
- c) $g_{U,V}(Q)=\lambda_2(x_Q-x_V)-y_Q+y_V$ ， $Q \neq O$ ， $U \neq \pm V$;
- d) $g_{V,-V}(Q)=x_Q-x_V$ ， $Q \neq O$ 。

Miller 算法是计算双线性对的有效算法。

Miller 算法

输入： 曲线 E ， E 上两点 P 和 Q ，整数 c 。

输出： $f_{P,c}(Q)$ 。

- a) 设 c 的二进制表示是 $c_j \dots c_1 c_0$ ，其最高位 c_j 为 1；
- b) 置 $f=1$ ， $V=P$ ；
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0，执行：
 - c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q) / g_{2V}(Q)$ ， $V = [2]V$ ；
 - c.2) 若 $c_i=1$ ，令 $f = f \cdot g_{V,P}(Q) / g_{V+P}(Q)$ ， $V = V + P$ 。
- d) 输出 f 。

一般，称 $f_{P,c}(Q)$ 为 Miller 函数。

B.3 Weil 对的计算

设 E 是 F_q 上的椭圆曲线， r 是与 q 互素的正整数，设 μ_r 是 r 次单位根集合， k 是相对于 r 的嵌入次数，即 $r|q^k-1$ ，则 $\mu_r \subset F_{q^k}$ 。

令 $\mathcal{G}_1=E[r]$ ， $\mathcal{G}_2=E[r]$ ， $\mathcal{G}_T=\mu_r$ ，则 Weil 对是从 $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ 到 \mathcal{G}_T 的双线性映射，记为 e_r 。

设 $P \in \mathcal{G}_1$ ， $Q \in \mathcal{G}_2$ ，若 $P=O$ 或 $Q=O$ ，则 $e_r(P, Q)=1$ ；如果 $P \neq O$ 且 $Q \neq O$ ，随机选取非无穷远点 $T \in \mathcal{G}_1$ ， $U \in \mathcal{G}_2$ ，使得 $P+T$ 和 T 均不等于 U 或 $U+Q$ ，则 Weil 对为：

$$e_r(P, Q) = \frac{f_{P+T, r}(Q+U) f_{T, r}(U) f_{U, r}(P+T) f_{Q+U, r}(T)}{f_{T, r}(Q+U) f_{P+T, r}(U) f_{Q+U, r}(P+T) f_{U, r}(T)}。$$

$f_{P+T, r}(Q+U)$ ， $f_{T, r}(Q+U)$ ， $f_{P+T, r}(U)$ ， $f_{T, r}(U)$ ， $f_{Q+U, r}(P+T)$ ， $f_{Q+U, r}(T)$ ， $f_{U, r}(P+T)$ 和 $f_{U, r}(T)$ 均可用 Miller 算法计算。在计算过程中，若出现分母为 0 的情况，则更换点 T 或 U 重新计算。

B.4 Tate对的计算

设 E 是 F_q 上的椭圆曲线, r 是与 q 互素的正整数, k 是相对于 r 的嵌入次数。设 Q 是 $E(F_{q^k})[r]$ 上的 r 阶点, 由 Q 生成的循环群记为 $\langle Q \rangle$ 。 $(F_{q^k}^*)^r$ 为 $F_{q^k}^*$ 中每一个元素的 r 次幂构成的集合, $(F_{q^k}^*)^r$ 是 $F_{q^k}^*$ 的子群, $F_{q^k}^*$ 关于 $(F_{q^k}^*)^r$ 的商群记为 $F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$ 。

令 $\mathcal{G}_1 = E(F_q)[r]$, $\mathcal{G}_2 = \langle Q \rangle$, $\mathcal{G}_T = F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$, 则 Tate 对是从 $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ 到 \mathcal{G}_T 的双线性映射, 记为 t_r 。

设 $P \in \mathcal{G}_1$, $Q \in \mathcal{G}_2$, 若 $P=O$ 或 $Q=O$, 则 $t_r=1$; 若 $P \neq O$ 且 $Q \neq O$, 随机选择非无穷远点 $U \in E(F_{q^k})$, 使得 $P \neq Q, P \neq Q+U, U \neq -Q$, 则 Tate 对为:

$$t_r(P, Q) = \frac{f_{P,r}(Q+U)}{f_{P,r}(U)}。$$

$f_{P,r}(Q+U)$ 和 $f_{P,r}(U)$ 可通过 Miller 算法计算。在计算过程中, 若出现分母为 0 的情况, 则更换点 U 重新计算。

在实际应用中, 一般使用约化 Tate 对:

$$t_r(P, Q) = \begin{cases} f_{P,r}(Q)^{(q^k-1)/r}, & Q \neq O, \\ 1, & Q = O. \end{cases}$$

约化 Tate 对比一般 Tate 对的计算量减少了一半。若相对于 r 的嵌入次数 k 是偶数时, 约化 Tate 对的计算方法可以进一步优化。算法 1 描述的是一般约化 Tate 对的计算方法, 算法 2、3、4 均指 $k=2d$ 的情况。

算法 1

输入: 与 q 互素的整数 r , $P \in E(F_q)[r]$, $Q \in E(F_{q^k})[r]$ 。

输出: $t_r(P, Q)$ 。

- a) 设 r 的二进制表示是 $r_j \dots r_1 r_0$, 其最高位 r_j 为 1;
- b) 置 $f=1, V=P$;
- c) 对 $i=j-1$ 降至 0, 执行:
 - c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q) / g_{2V}(Q)$, $V = [2]V$;
 - c.2) 若 $r_i=1$, 则计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q) / g_{V+P}(Q)$, $V = V + P$;
- d) 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$;
- e) 输出 f 。

算法 2

输入: 与 q 互素的整数 r , $P \in E(F_q)[r]$, $Q \in E(F_{q^k})[r]$ 。

输出: $t_r(P, Q)$ 。

- a) 设 r 的二进制表示是 $r_j \dots r_1 r_0$, 其最高位 r_j 为 1;
- b) 置 $f=1, V=P$;
- c) 对 $i=j-1$ 降至 0, 执行:
 - c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q) / g_{2V}(Q)$, $V = [2]V$;
 - c.2) 若 $r_i=1$, 则计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q) / g_{V+P}(Q)$, $V = V + P$;
- d) 计算 $f = f^{q^{d-1}}$;
- e) 计算 $f = f^{(q^{d+1}-1)/r}$;
- f) 输出 f 。

算法 3

如果将 $F_{q^k} (k=2d)$ 看成 F_{q^d} 的二次扩域, 则 F_{q^k} 上元素可表示成 $w=w_0+iw_1$ 的形式, 其中 $w_0, w_1 \in F_{q^d}$, 则 w 的共轭 $\bar{w} = w_0 - iw_1$, 此时算法 1 中的求逆运算可用共轭代替。

输入: 与 q 互素的整数 r , $P \in E(F_q)[r]$, $Q \in E(F_{q^k})[r]$ 。

输出: $t_r(P, Q)$ 。

- a) 设 r 的二进制表示是 $r_j \dots r_1 r_0$, 其最高位 r_j 为 1;
- b) 置 $f=1, V=P$;
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:

- c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q) \cdot \bar{g}_{2V}(Q)$, $V = [2]V$;
- c.2) 若 $r_i=1$, 令 $f = f \cdot g_{V,P}(Q) \cdot \bar{g}_{V+P}(Q)$, $V = V + P$;
- d) 计算 $f = f^{q^{d-1}}$;
- e) 计算 $f = f^{(q^{d+1})/r}$;
- f) 输出 f 。

算法 4

当 q 为大于 3 的素数时, 点 $Q \in E'$, E' 是 E 的扭曲线, 此时算法可进一步优化。

输入: $P \in E(F_q)[r]$, $Q \in E'(F_{q^d})[r]$, 整数 r 。

输出: $t_r(P, Q)$ 。

- a) 设 r 的二进制表示是 $r_j \dots r_1 r_0$, 其最高位 r_j 为 1;
- b) 置 $f=1$, $V=P$;
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q)$, $V = [2]V$;
 - c.2) 若 $r_i=1$, 则计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q)$, $V = V + P$;
- d) 计算 $f = f^{q^{d-1}}$;
- e) 计算 $f = f^{(q^{d+1})/r}$;
- f) 输出 f 。

B. 5 Ate对的计算

设 π_q 为 Frobenius 自同态, 即 $\pi_q: E \rightarrow E, (x, y) \mapsto (x^q, y^q)$; $[q]$ 为映射: $E \rightarrow E, Q \mapsto [q]Q$; $[1]$ 为单位映射; π_q 的对偶为 π_q' , 满足 $\pi_q \cdot \pi_q' = [q]$; $\text{Ker}()$ 表示映射的核; 设椭圆曲线 $E(F_q)$ 的 Frobenius 迹为 t , 令 $T=t-1$ 。

下面给出不同结构下的 Ate 对的计算方法。

B. 5.1 定义在 $G_2 \times G_1$ 上 Ate 对的计算

设 $G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1])$, $G_2 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [q])$, $P \in G_1$, $Q \in G_2$ 。定义 $G_2 \times G_1$ 上 Ate 对:

$$\begin{aligned} \text{Ate}: G_2 \times G_1 &\rightarrow F_{q^k}^* / (F_{q^k}^*)^r \\ (Q, P) &\mapsto f_{Q, T}(P)^{(q^k-1)/r} \end{aligned}$$

下面给出 $G_2 \times G_1$ 上 Ate 对的计算方法:

输入: $G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1])$, $G_2 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [q])$, $P \in G_1$, $Q \in G_2$, 整数 $T = t-1$ 。

输出: $\text{Ate}(Q, P)$ 。

- a) 设 T 的二进制表示是 $t_j \dots t_1 t_0$, 其最高位 t_j 为 1;
- b) 置 $f=1$, $V=Q$;
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(P)$, $V = [2]V$;
 - c.2) 若 $t_i=1$, 计算 $f = f \cdot g_{V,Q}(P) / g_{V+Q}(P)$, $V = V + Q$;
- d) 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$;
- e) 输出 f 。

B. 5.2 定义在 $G_1 \times G_2$ 上 Ate 对的计算

对于超奇异椭圆曲线来说, 以上 Ate 对的定义与技术可以直接应用; 而对于常曲线来说, 需要把 G 转换到扭曲线上才可以定义 Ate 对。

B. 5.2.1 超奇异椭圆曲线上 Ate 对

设 E 为定义在 F_q 上的超奇异椭圆曲线, $G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q' - [q])$, $G_2 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q' - [1])$, $G_T = F_{q^k}^* / (F_{q^k}^*)^r$,

$P \in \mathbf{G}_1, Q \in \mathbf{G}_2$ 。定义 $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ 上的 Ate 对：

$$\begin{aligned} \text{Ate}: \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2 &\rightarrow F_{q^k}^* / (F_{q^k}^*)^r \\ (P, Q) &\mapsto f_{P, T}(Q)^{(q^k-1)/r}。 \end{aligned}$$

下面给出 $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ 上 Ate 对的计算方法：

输入： $\mathbf{G}_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q' - [q])$, $\mathbf{G}_2 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q' - [1])$, $P \in \mathbf{G}_1, Q \in \mathbf{G}_2$, 整数 $T = t-1$ 。

输出： $\text{Ate}(P, Q)$ 。

- a) 设 T 的二进制表示是 $t_j \dots t_1 t_0$, 其最高位 t_j 为 1;
- b) 置 $f=1, V=P$;
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V, V}(Q)$, $V = [2]V$;
 - c.2) 若 $t_i=1$, 计算 $f = f \cdot g_{V, P}(Q) / g_{V+P}(Q)$, $V = V + P$;
- d) 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$;
- e) 输出 f 。

B. 5. 2. 2 常曲线上的 Ate 对

对于常曲线来说, 存在一个整数 e , 使得 $(\pi_q')^e$ 成为 \mathcal{G}_1 上的自同构, 这样可以用扭曲理论在 $\text{Ate}(P, Q)$ 和 $f_{P, T^e}(Q)$ 之间建立起联系, 其中 $T=t-1$, t 为迹。

设 E 是定义在 F_q 上的椭圆曲线, E' 为 E 的 d 次扭曲曲线。 k 为嵌入次数, $m=\text{gcd}(k, d)$, $e=k/m$, ζ_m 是 m 次本原单位根, 当 $p \geq 5$ 时, d 的取值有三种情况：

- a) $d=6, \beta = \zeta_m^{-6}, E': y^2 = x^3 + \beta b, \phi_6: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/3}x, \beta^{-1/2}y), \mathcal{G}_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1]), \mathcal{G}_2 = E'[r] \cap \text{Ker}([\beta^{-1/6}] \pi_q^e - [1]);$
- b) $d=4, \beta = \zeta_m^{-4}, E': y^2 = x^3 + \beta ax, \phi_4: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/2}x, \beta^{-3/4}y), \mathcal{G}_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1]), \mathcal{G}_2 = E'[r] \cap \text{Ker}([\beta^{-1/4}] \pi_q^e - [1]);$
- c) $d=2, \beta = \zeta_m^{-2}, E': y^2 = x^3 + \beta^2 ax + \beta^3 b, \phi_2: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1}x, \beta^{-3/2}y), \mathcal{G}_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1]), \mathcal{G}_2 = E'[r] \cap \text{Ker}([\beta^{-1/2}] \pi_q^e - [1])。$

设 $P \in \mathcal{G}_1, Q \in \mathcal{G}_2$ 。定义 $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ 上 Ate 对：

$$\begin{aligned} \text{Ate}: \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 &\rightarrow F_{q^k}^* / (F_{q^k}^*)^r \\ (P, Q) &\mapsto f_{P, T^e}(Q)^{(q^k-1)/r}。 \end{aligned}$$

下面给出具体算法描述：

输入： $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, P \in \mathcal{G}_1, Q \in \mathcal{G}_2$, 整数 $T = t-1$ 。

输出： $\text{Ate}(P, Q)$ 。

- a) 计算 $u=T^e$;
- b) 设 u 的二进制表示是 $t_j \dots t_1 t_0$, 其最高位 t_j 为 1;
- c) 置 $f=1, V=P$;
- d) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - d.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V, V}(Q)$, $V = [2]V$;
 - d.2) 若 $t_i=1$, 计算 $f = f \cdot g_{V, P}(Q) / g_{V+P}(Q)$, $V = V + P$;
- e) 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$;
- f) 输出 f 。

如果定义在 $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ 上的 Ate 对所基于的椭圆曲线是超奇异的，则容易看出它比 Tate 对有更高的效率。但对于常曲线来说，只有当 $|T| \leq r$ 时它的运算效率才会比 Tate 对高，所以只有在 t 值较小时才推荐使用 Ate 对。

B.6 R-ate 对的计算

B.6.1 R-ate 对的定义

R-ate 对中的 “R” 可视为两个对的比值，也可以看成是 Tate 对的某固定幂次。

令 $A, B, a, b \in \mathbb{Z}$, $A = aB + b$. Miller 函数 $f_{Q,A}(P)$ 有如下性质：

$$\begin{aligned} f_{Q,A}(P) &= f_{Q,aB+b}(P) = f_{Q,aB}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot g_{[aB]Q,[b]Q}(P) / g_{[A]Q}(P) \\ &= f_{Q,B}^a(P) \cdot f_{[B]Q,a}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot \frac{g_{[aB]Q,[b]Q}(P)}{g_{[A]Q}(P)} \end{aligned}$$

定义 R-ate 对为

$$\begin{aligned} R_{A,B}(Q, P) &= (f_{[B]Q,a}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot \frac{g_{[aB]Q,[b]Q}(P)}{g_{[A]Q}(P)})^{(q^k-1)/n} \\ &= \left(\frac{f_{Q,A}(P)}{f_{Q,B}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} \end{aligned}$$

如果 $f_{Q,A}(P)$ 和 $f_{Q,B}(P)$ 是非退化对的 Miller 函数，则 $R_{A,B}(Q, P)$ 也是非退化对。

令 $L_1, L_2, M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$, 使得 $e_n^{L_1}(Q, P) = (f_{Q,A}(P))^{M_1 \cdot (q^k-1)/n}$

$$e_n^{L_2}(Q, P) = (f_{Q,B}(P))^{M_2 \cdot (q^k-1)/n}$$

令 $M = \text{lcm}(M_1, M_2)$, $m = (M/M_1) \cdot L_1 - a \cdot (M/M_2) \cdot L_2$.

为了非退化， n 不能整除 m . 我们有

$$e_n^m(Q, P) = e_n^{\frac{M}{M_1} L_1 - a \frac{M}{M_2} L_2}(Q, P) = \frac{e_n^{L_1}(Q, P)^{\frac{M}{M_1}}}{e_n^{a L_2}(Q, P)^{\frac{M}{M_2}}} = \left(\frac{f_{Q,A}(P)}{f_{Q,B}(P)^a} \right)^{M \cdot (q^k-1)/n}$$

易见 $e_n^m(Q, P) = R_{A,B}(Q, P)^M$.

一般来说，不是任意整数对 (A, B) 都能给出非退化对， (A, B) 有四种选择：

1. $(A; B) = (q^i; n)$
2. $(A; B) = (q; T_1)$
3. $(A; B) = (T_i; T_j)$
4. $(A; B) = (n; T_i)$

其中 $T_i \equiv q^i \pmod{n}$, $i \in \mathbb{Z}$, $0 < i < k$.

情形 1: $(A; B) = (q^i; n)$, 由于 $A = aB + b$, 即 $q^i = an + b$. 因此 $b \equiv q^i \pmod{n}$,

$$\text{又 } \left(\frac{f_{Q,q^i}(P)}{f_{Q,n}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q, P) = (f_{[n]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[an]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

因为 $b \equiv q^i \pmod{n}$, 所以 $g_{[an]Q[b]Q}(P) = g_{[q^i]Q}(P)$. 更进一步, $f_{[n]Q,a}(P) = 1$. 因此

$$R_{A,B}(Q, P) = f_{Q,q^i}(P)^{(q^k-1)/n} \quad (1)$$

情形 2: $(A; B) = (q; T_1)$, 即 $q = aT_1 + b$, 则:

$$\left(\frac{f_{Q,q}(P)}{f_{Q,T_1}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q, P) = (f_{[T_1]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_1]Q[b]Q}(P)}{g_{[q]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

由于 $f_{[T_1]Q,a}(P) = f_{Q,a}^q(P)$, 因此

$$R_{A,B}(Q, P) = (f_{Q,a}^q(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_1]Q[b]Q}(P)}{g_{[q]Q}(P)})^{(q^k-1)/n} \quad (2)$$

情形 3: $(A; B) = (T_i; T_j)$, 即 $T_i = aT_j + b$. 有:

$$\left(\frac{f_{Q,T_i}(P)}{f_{Q,T_j}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q, P) = (f_{[T_j]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_j]Q[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

同样, 因为 $f_{[T_j]Q,a}(P) = f_{Q,a}^{q_j}(P)$, 因此:

$$R_{A,B}(Q, P) = (f_{Q,a}^{q_j}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_j]Q[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)})^{(q^k-1)/n} \quad (3)$$

情形 4: $(A; B) = (n; T_i)$, 即 $n = aT_i + b$. 因此:

$$\left(\frac{f_{Q,n}(P)}{f_{Q,T_i}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q, P) = (f_{[T_i]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_i]Q[b]Q}(P)}{g_{[n]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

同样, 由 $f_{[T_i]Q,a}(P) = f_{Q,a}^{q_i}(P)$ 得

$$R_{A,B}(Q, P) = (f_{Q,a}^{q_i}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_i]Q[b]Q}(P)}{g_{[n]Q}(P)})^{(q^k-1)/n} \quad (4)$$

情形 1 的 R-ate 对也称 Ate_i 对。情形 2、3、4 的对计算需要两个长度为 $\log a$ 和 $\log b$ 的 Miller 循环。情形 2 和情形 4 只能改变一个参数 i 来获得有效对, 情形 3 可以改变两个参数。因此, 一般都选择情形 3 的 R-ate 对, 这时 $(A; B) = (T_i; T_j)$ 。

为了降低 Miller 循环次数, 可以尝试不同的 i 和 j , 使整数 a 和 b 足够小, 从而使 Miller 循环次数减至 $\log(r^{1/\Phi(k)})$ 。

B. 6.2 BN 曲线上 R-ate 对的计算

Barreto 和 Naehrig 提出了一种构造素域 F_q 上适合对的常曲线的方法, 通过此方法构造的曲线称为 BN 曲线。BN 曲线方程为 $E: y^2 = x^3 + b$, 其中 $b \neq 0$. 嵌入次数 $k=12$, 曲线阶 r 也是素数。

基域特征 q , 曲线阶 r , Frobenius 映射的迹 tr 可通过参数 t 来确定:

$$q(t) = 36t^4 + 36t^3 + 24t^2 + 6t + 1$$

$$r(t) = 36t^4 + 36t^3 + 18t^2 + 6t + 1$$

$$tr(t) = 6t^2 + 1$$

其中 $t \in \mathbb{Z}$ 是任意使得 $q = q(t)$ 和 $r = r(t)$ 均为素数的整数，为了达到一定的安全级别， t 必须足够大，至少达到 63 比特。

BN 曲线存在定义在 F_{q^2} 上的 6 次扭曲线 E' ： $y^2 = x^3 + \beta b$ ，其中 $\beta \in F_{q^2}$ ，并且在 F_{q^2} 上既不是二次元也不是三次元，选择 β 使得 $r \nmid \# E'(F_{q^2})$ ， \mathbb{G}_2 中点可用扭曲线 E' 上的点来表示，

$\phi_6 : E' \rightarrow E : (x, y) \mapsto (\beta^{-1/3}x, \beta^{-1/2}y)$ 。因此对的计算限制在 $E(F_q)$ 上点 P 和 $E'(F_{q^2})$ 上点 Q' 。

π_q 为 Frobenius 自同态， $\pi_q : E \rightarrow E$ ， $\pi_q(x, y) = (x^q, y^q)$ 。

$\pi_{q^2} : E \rightarrow E$ ， $\pi_{q^2}(x, y) = (x^{q^2}, y^{q^2})$ 。

R-ate 对的计算：

输入： $P \in E(F_q)[r]$ ， $Q \in E'(F_{q^2})[r]$ ， $a = 6t + 2$ 。

输出： $R_a(Q, P)$ 。

a) 设 $a = \sum_{i=0}^{L-1} a_i 2^i$ ， $a_{L-1} = 1$ ；

b) 置 $T = Q$ ， $f = 1$ ；

c) 对 i 从 $L-2$ 降至 0，执行：

c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{T,T}(P)$ ， $T = [2]T$ ；

c.2) 若 $a_i = 1$ ，计算 $f = f \cdot g_{T,Q}(P)$ ， $T = T + Q$ ；

d) 计算 $Q_1 = \pi_q(Q)$ ， $Q_2 = \pi_{q^2}(Q)$ ；

e) 计算 $f = f \cdot g_{T,Q_1}(P)$ ， $T = T + Q_1$ ；

f) 计算 $f = f \cdot g_{T,-Q_2}(P)$ ， $T = T - Q_2$ ；

g) 计算 $f = f^{(q^{12}-1)/r}$ ；

h) 输出 f 。

B.7 适合对的椭圆曲线

对于超奇异曲线，双线性对的构造相对容易，但对于随机生成的曲线，构造可计算的双线性对比较困难，因此采用常曲线时，需要构造适合对的曲线。

假设 E 是定义在 F_q 上的椭圆曲线，如果以下三个条件成立，则称 E 是适合对的曲线：

a) $\#E(F_q)$ 有一个不小于 \sqrt{q} 的素因子 r ；

b) E 相对于 r 的嵌入次数小于 $\log_2(r)/8$ ；

c) $r \pm 1$ 的最大素因子的规模与 r 相当。

构造适合对的椭圆曲线的步骤如下：

步骤 1：选定 k ，计算整数 t 、 r 、 q ，使得存在一条椭圆曲线 $E(F_q)$ ，其迹为 t ，具有一个素数阶 r 的子群且嵌入次数为 k ；

步骤 2：利用复乘方法在 F_q 上计算该曲线的方程参数。

附录 C

数论算法

C.1 有限域中的运算

C.1.1 有限域中的指数运算

设 a 是正整数， g 是域 F_q 上的元素，指数运算是计算 g^a 的运算过程。通过以下的二进制方法可以有效地执行指数运算。

输入：正整数 a ，域 F_q ，域元素 g 。

输出： g^a 。

- a) 置 $e = a \bmod (q-1)$ ，若 $e=0$ ，则输出1；
- b) 设 e 的二进制表示是 $e_r e_{r-1} \dots e_1 e_0$ ，其最高位 e_r 为1；
- c) 置 $x = g$ ；
- d) 对 i 从 $r-1$ 降至0执行：
 - d.1) 置 $x = x^2$ ；
 - d.2) 若 $e_i = 1$ ，则置 $x = g \cdot x$ ；
- e) 输出 x 。

C.1.2 有限域中的逆运算

设 g 是域 F_q 上的非零元素，则逆元素 g^{-1} 是使得 $g \cdot c = 1$ 成立的域元素 c 。由于 $c = g^{q-2}$ ，因此求逆可通过指数运算实现。若 q 是素数， g 是满足 $1 \leq g \leq q-1$ 的整数，则 g^{-1} 是整数 c ， $1 \leq c \leq q-1$ ，且 $g \cdot c \equiv 1 \pmod{q}$ 。

输入：域 F_q ， F_q 中的非零元素 g 。

输出：逆元素 g^{-1} 。

- a) 计算 $c = g^{q-2}$ (参见附录C.1.1)；
- b) 输出 c 。

更为有效的方法是扩展的欧几里德(Euclid)算法。

C.1.3 Lucas序列的生成

令 X 和 Y 是非零整数， X 和 Y 的Lucas序列 U_k, V_k 的定义如下：

$$U_0=0, U_1=1, \quad \text{当 } k \geq 2 \text{ 时, } U_k = X \cdot U_{k-1} - Y \cdot U_{k-2};$$

$$V_0=2, V_1=X, \quad \text{当 } k \geq 2 \text{ 时, } V_k = X \cdot V_{k-1} - Y \cdot V_{k-2}.$$

上述递归式适于计算 k 值较小的 U_k 和 V_k 。对大整数 k ，下面的算法可有效地计算 $U_k \bmod q$ 和 $V_k \bmod q$ 。

输入：奇素数 q ，整数 X 和 Y ，正整数 k 。

输出： $U_k \bmod q$ 和 $V_k \bmod q$ 。

- a) 置 $\Delta = X^2 - 4Y$ ；
- b) 设 k 的二进制表示是 $k = k_r k_{r-1} \dots k_1 k_0$ ，其中最高位 k_r 为1；
- c) 置 $U = 1, V = X$ ；
- d) 对 i 从 $r-1$ 降至0执行：
 - d.1) 置 $(U, V) = ((U \cdot V) \bmod q, ((V^2 + \Delta \cdot U^2)/2) \bmod q)$ ；
 - d.2) 若 $k_i = 1$ ，则置 $(U, V) = ((X \cdot U + V)/2 \bmod q, ((X \cdot V + \Delta \cdot U)/2) \bmod q)$ ；
- e) 输出 U 和 V 。

C.1.4 平方根的求解

C.1.4.1 F_q 上平方根的求解

设 q 是奇素数， g 是满足 $0 \leq g < q$ 的整数， g 的平方根(mod q)是整数 y ，即 $y^2 \bmod q = g$ ， $0 \leq y < q$ 。

若 $g=0$ ，则只有一个平方根，即 $y=0$ ；若 $g \neq 0$ ，则 g 有零个或两个平方根，若 y 是其中一个平方根，则另一个平方根就是 $q-y$ 。

下面的算法可以确定 g 是否有平方根，若有，就计算其中一个根。

输入：奇素数 q ，整数 g ， $0 < g < q$ 。

输出：若存在 g 的平方根，则输出一个平方根，否则输出“不存在平方根”。

算法1：对 $q \equiv 3 \pmod{4}$ ，即存在正整数 u ，使得 $q=4u+3$ 。

- 计算 $y = g^{u+1} \bmod q$ (参见附录C.1.1)；
- 计算 $z = y^2 \bmod q$ ；
- 若 $z = g$ ，则输出 y ；否则输出“不存在平方根”。

算法2：对 $q \equiv 5 \pmod{8}$ ，即存在正整数 u ，使得 $q=8u+5$ 。

- 计算 $z = g^{2u+1} \bmod q$ (参见附录C.1.1)；
- 若 $z \equiv 1 \pmod{q}$ ，计算 $y = g^{u+1} \bmod q$ ，输出 y ，终止算法；
- 若 $z \equiv -1 \pmod{q}$ ，计算 $y = (2g \cdot (4g)^u) \bmod q$ ，输出 y ，终止算法；
- 输出“不存在平方根”。

算法3：对 $q \equiv 1 \pmod{8}$ ，即存在正整数 u ，使得 $q=8u+1$ 。

- 置 $Y = g$ ；
- 生成随机数 X ， $0 < X < q$ ；
- 计算Lucas序列元素 (见附录C.1.3)： $U = U_{4u+1} \bmod q$ ， $V = V_{4u+1} \bmod q$ ；
- 若 $V^2 \equiv 4Y \pmod{q}$ ，则输出 $y = (V/2) \bmod q$ ，并终止；
- 若 $U \bmod q \neq 1$ 且 $U \bmod q \neq q-1$ ，则输出“不存在平方根”，并终止；
- 返回步骤b)。

C.1.4.2 F_{q^2} 上平方根的求解

设 q 是奇素数，对于二次扩域 F_{q^2} ，假设约化多项式为 $f(x)=x^2+n$ ， $n \in F_q$ ，则 F_{q^2} 中元素 β 可表示成 $a+bx$ 的形式， $a, b \in F_q$ ，则 β 的平方根为：

$$\sqrt{\beta} = \sqrt{a+bx} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - nb^2}}{2}} + \frac{xb}{2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - nb^2}}{2}}} \right) \text{ 或 } \pm \left(\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - nb^2}}{2}} + \frac{xb}{2\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - nb^2}}{2}}} \right)$$

下面的算法可以确定 β 是否有平方根，若有，就计算其中一个根。

输入： F_{q^2} 中元素 $\beta=a+bx$ 且 $\beta \neq 0$ ， q 为奇素数。

输出：若存在 β 的平方根，则输出一个平方根 z ，否则输出“不存在平方根”。

- 计算 $U = a^2 - nb^2$ ；
- 利用C.1.4.1的方法求 $U \bmod q$ 的平方根，若 $U \bmod q$ 的平方根存在，记作 w_i ，即 $w_i^2 = U \bmod q$ ， $i=1,2$ ，转步骤c)；否则输出“不存在平方根”，并终止；
- 对 i 从1至2执行：
 - 计算 $V = (a + w_i)/2$ ；

- c.2) 利用C.1.4.1的方法求 $V \bmod q$ 的平方根，若 $V \bmod q$ 的平方根存在，任取一个根 y ，即 $y^2 = V \bmod q$ ，转步骤d)；若 $V \bmod q$ 的平方根不存在且 $i=2$ ，输出“不存在平方根”，并终止算法；
- d) 计算 $z_1 = b/2y \pmod{q}$ ，令 $z_0 = y$ ；
- e) 输出 $z = z_0 + z_1x$ 。

C. 1. 4. 3 F_{q^m} 上平方根的求解

C. 1. 4. 3. 1 F_{q^m} 上平方元检测

设 q 是奇素数，且 $m \geq 2$ ， g 是域 F_{q^m} 中非零元素，下面算法给出 g 是否为一个平方元的检测。

输入：域元素 g 。

输出：若 g 是平方元则输出“是平方元”，否则输出“不是平方元”。

- a) 计算 $B = g^{(q^m-1)/2}$ ；(参见C.1.1)
- b) 若 $B=1$ ，则输出“是平方元”；
- c) 若 $B=-1$ ，则输出“不是平方元”。

C. 1. 4. 3. 2 F_{q^m} 上平方根的求解

设 q 是奇素数，且 $m \geq 2$ 。

输入：域元素 g 。

输出：若 g 是平方元则输出平方根 B ，否则输出“没有平方根”。

- a) 随机选取非平方元 Y ；
- b) 计算 $q^m-1=2^u \times k$ ；(其中 k 为奇数。)
- c) 计算 $Y = Y^k$ ；
- d) 计算 $C = g^k$ ；
- e) 计算 $B = g^{(k+1)/2}$ ；
- f) 若 $C^{2^{u-1}} \neq 1$ ，则输出“没有平方根”，终止算法；
- g) 当 $C \neq 1$ 执行：
 - g.1) 设 i 是使 $C^{2^i} = 1$ 成立的最小正整数；
 - g.2) 计算 $C = C \times Y^{2^{u-i}}$ ；
 - g.3) 计算 $B = B \times Y^{2^{u-i-1}}$ ；
- h) 输出 B 。

C. 1. 5 概率素性检测

设 u 是一个大的正整数，下面的概率算法(Miller-Rabin检测)将确定 u 是素数还是合数。

输入：一个大的奇数 u 和一个大的正整数 T 。

输出：“概率素数”或“合数”。

- a) 计算 v 和奇数 w ，使得 $u-1=2^v \cdot w$ ；
- b) 对 j 从1到 T 执行：
 - b.1) 在区间 $[2, u-1]$ 中选取随机数 a ；
 - b.2) 置 $b = a^w \bmod u$ ；
 - b.3) 若 $b=1$ 或 $u-1$ ，转到步骤b.6)；
 - b.4) 对 i 从1到 $v-1$ 执行：
 - b.4.1) 置 $b = b^2 \bmod u$ ；
 - b.4.2) 若 $b = u-1$ ，转到步骤b.6)；
 - b.4.3) 若 $b = 1$ ，输出“合数”并终止；

- b.4.4) 下一个 i ;
- b.5) 输出“合数”,并终止;
- b.6) 下一个 j ;
- c) 输出“概率素数”。

若算法输出“合数”,则 u 是一个合数。若算法输出“概率素数”,则 u 是合数的概率小于 2^{-2T} 。这样,通过选取足够大的 T ,误差可以忽略。

C.2 有限域上的多项式

C.2.1 最大公因式

若 $f(x) \neq 0$ 和 $g(x) \neq 0$ 是系数在域 F_q 中的两个多项式,则唯一地存在次数最高的首一多项式 $d(x)$,其系数在域 F_q 中且同时整除 $f(x)$ 和 $g(x)$ 。多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因子,记为 $\gcd(f(x), g(x))$ 。利用下面的算法(欧几里德算法)可计算出两个多项式的最大公因子。

输入: 有限域 F_q , F_q 上的两个非零多项式 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ 。

输出: $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$ 。

- a) 置 $a(x) = f(x)$, $b(x) = g(x)$;
- b) 当 $b(x) \neq 0$ 时,循环执行:
 - b.1) 置 $c(x) = a(x) \bmod b(x)$;
 - b.2) 置 $a(x) = b(x)$;
 - b.3) 置 $b(x) = c(x)$;

设 α 是 $a(x)$ 的首项系数并输出 $\alpha^{-1}a(x)$ 。

C.2.2 F_q 上多项式不可约性的检测

设 $f(x)$ 是 F_q 上的多项式,利用下面的算法可以有效地检测 $f(x)$ 的不可约性。

输入: F_q 上的首一多项式 $f(x)$, 素数 q 。

输出: 若 $f(x)$ 在 F_q 上不可约,则输出“正确”;否则,输出“错误”。

- a) 置 $u(x) = x$, $m = \deg(f(x))$;
- b) 对 i 从1到 $\lfloor m/2 \rfloor$ 执行:
 - b.1) 计算 $u(x) = u^q(x) \bmod f(x)$;
 - b.2) 计算 $d(x) = \gcd(f(x), u(x) - x)$;
 - b.3) 若 $d(x) \neq 1$,则输出“错误”,并终止算法;
- c) 输出“正确”。

C.3 椭圆曲线算法

C.3.1 椭圆曲线点的寻找

给定有限域上的椭圆曲线,利用下面的算法可有效地找出曲线上任意一个非无穷远点。

C.3.1.1 $E(F_p)$ 上点的寻找

输入: 素数 p , F_p 上一条椭圆曲线 E 的参数 a, b 。

输出: $E(F_p)$ 上一个非无穷远点。

- a) 选取随机整数 x , $0 \leq x < p$;
- b) 置 $\alpha = (x^3 + ax + b) \bmod p$;

- c) 若 $\alpha = 0$ ，则输出 $(x, 0)$ 并终止算法；
- d) 求 $\alpha \bmod p$ 的平方根 y (参见附录C.1.4.1)；
- e) 若步骤 d) 的输出是“不存在平方根”，则返回步骤a)；
- f) 输出 (x, y) 。

C. 3. 1. 2 $E(F_{q^m})$ ($m \geq 2$) 上点的寻找

输入：有限域 F_{q^m} (q 为奇素数)， F_{q^m} 上的椭圆曲线 E 的参数 a, b 。

输出： E 上一个非无穷远点。

- a) 随机选取 F_{q^m} 上元素 x ；
- b) 在 F_{q^m} 上计算 $\alpha = x^3 + ax + b$ ；
- c) 若 $\alpha = 0$ ，则输出 $(x, 0)$ 并终止算法；
- d) 在 F_{q^m} 上求 α 的平方根 y (参见附录C.1.4.3)；
- e) 若步骤 d) 的输出是“不存在平方根”，则返回步骤a)；
- f) 输出 (x, y) 。

C. 3. 2 椭圆曲线上 l 阶点的寻找

本算法可用于椭圆曲线 l 阶子群生成元的求取。

输入：椭圆曲线 $E(F_q)$ 的参数 a, b ，曲线阶 $\# E(F_q) = n = l \cdot r$ ，其中 l 为素数。

输出： $E(F_q)$ 上一个 l 阶点。

- a) 用C.3.1的方法随机选取曲线上点 Q ；
- b) 计算 $P = [r]Q$ ；
- c) 若 $P = O$ ，返回步骤a)；
- d) 输出 P 。

C. 3. 3 扭曲线上 l 阶点的寻找

设 F_{q^m} 上椭圆曲线 E 的方程： $y^2 = x^3 + ax + b$ ，其阶 $\# E(F_{q^m}) = q^m + 1 - t$ ，设其扭曲线 E' 的方程： $y^2 = x^3 + \beta^2 \cdot ax + \beta^3 \cdot b$ ， β 为 F_{q^m} 上非平方元， $E'(F_{q^m})$ 的阶 $\# E'(F_{q^m}) = q^m + 1 + t$ 。

输入：椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ 的扭曲线 $E'(F_{q^m})$ 的参数 a, b 和 β ，扭曲线阶 $\# E'(F_{q^m}) = n' = l \cdot r$ ，其中 l 为素数。

输出： $E'(F_{q^m})$ 上一个 l 阶点。

- a) 用C.3.1的方法随机选取 $E'(F_{q^m})$ 上点 Q ；
- b) 计算 $P = [r]Q$ ；
- c) 若 $P = O$ ，返回步骤a)；
否则， P 是 l 阶点；
- d) 输出 P 。